Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen
herausgegeben von den **Direktoren des Seminars**
XXI. Heft

Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung

von

WILHELM KRAUS
in Lich (Hessen)

Giessen 1932

Im Selbstverlag des Mathematischen Seminars, Giessen, Bismarckstr. 16

Preis RM. 1.50

Die Arbeit wurde als Dissertation eingereicht.
Genehmigt durch die Philosophische Fakultät, II. Abteilung
am 14. Februar 1932.

Berichterstatter: Prof. Dr. Geppert.
„ Prof. Dr. Mohrmann.

Inhalt.

Einleitung.

Eine im Einheitskreise der w-Ebene reguläre analytische Funktion $z = f(w)$ läßt sich dort in eine konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$(1) \qquad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

und vermittelt eine Abbildung des Einheitskreises auf einen Bereich B der z-Ebene. Dieser Bildbereich ist einfach zusammenhängend und soll von einer einzigen Jordan-Kurve R begrenzt werden. Setzen wir weiterhin voraus, daß der Bereich B endlichen inneren Inhalt F hat, so konvergiert

$$\lim_{r \to 1} \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = \lim_{r \to 1} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n}$$

und stellt den Inhalt von B:

$$(2) \qquad \mathsf{F} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

dar.

Der Inhalt und ebenfalls der Umfang, überhaupt die ganze Gestalt des Bildbereiches werden von der abbildenden Funktion $f(w)$ bestimmt. Sie hängen also von den Koeffizienten der Potenzreihe (1) ab, und zwar der Inhalt nur von den Absolutbeträgen dieser Koeffizienten. Neben Inhalt und Umfang besitzt der Bildbereich B noch andere ihm eigentümliche Charakteristiken wie z. B. seine Greensche Funktion der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie und deren Integrale, ferner sind auch die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems

$$(3) \qquad \Delta u + \lambda u = 0 \,, \qquad u|^R = 0$$

durch den Bereich B eindeutig bestimmte Größen.

Alle diese Charakteristiken des Bereiches B hängen mit der Abbildungsfunktion $f(w)$ zusammen und müssen sich demnach auch durch die Koeffizienten a_n ausdrücken lassen. Man kann nun die Frage aufwerfen, wie sich die Eigenschaften des Bereiches B und diese seine Charakteristiken in den Koeffizienten der Reihe (1) spiegeln und umgekehrt, was man für Schlüsse von den Koeffizienten auf diese ziehen kann. Dieser Fragenkreis tritt als Analogon neben denjenigen, der sich mit der Wechselbeziehung von Funktion und Koeffizienten ihrer Potenzreihe beschäftigt, und überschneidet sich auch mit diesem. In diesem Zusammenhange sei auf die Ergebnisse von Löwner[1]) und Gronwall[2]) und von R. Nevanlinna[3]) über die Koeffizienten einer Potenzreihe, die den Einheitskreis auf einen konvexen bzw. sternigen Bereich abbildet, hingewiesen.

Bei Untersuchungen dieser Fragen wird man auch die an den Bereich B fest geknüpfte Greensche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ heranziehen und ihre Beziehung zu den Koeffizienten näher untersuchen. Vor allem wird dann die explizite Darstellung des ersten Eigenwertes der Randwertaufgabe (3), für die ja der Kreis die beiden bekannten Minimaleigenschaften besitzt[4]), interessieren. Dieser erste Eigenwert läßt sich ausgehend von der Integralgleichung

$$u(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_B\!\int G(x, y;\ \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

mit Hilfe des von H. A. Schwarz angegebenen Verfahrens der sog. Schwarzschen Konstanten konstruieren. Dieser so einfach anmutende Weg erweist sich aber wegen der Kompliziertheit der auftretenden Integrale der iterierten Kerne als nicht gangbar; er führt aber immerhin zu einer Betrachtung von Integralen der Form

$$\int\limits_B\!\int [G(x, y;\ \xi, \eta)]^n\, dx\, dy \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Auch das von Kellogg (Math. Annalen 86) angegebene Verfahren iterativer Konstruktion einer Eigenfunktion und des

1) Leipziger Berichte Bd. 69 (1917).
2) Comptes Rendus Bd. 162 (1916).
3) Översikt av Finska Bd. 63 (A) Nr. 6. (1920/21).
4) Vgl. Courant, Math. Ztschr. Bd. 1 (1918), bzw. Faber, Münch. Ber. 1924 und Krahn, Math. Ann. Bd. 94 (1925).

zugehörigen Eigenwertes führt auf dieselben Integrale der iterierten Kerne.

In der folgenden Arbeit werden wir für einige Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches den Zusammenhang mit der Kreisabbildungsfunktion angeben und untersuchen. Im § 1 werden wir eine Lösung für das isoperimetrische Problem durchführen. Der dort zu gebende Beweis erinnert in seinem Prinzip an den von A. Hurwitz[1]) mit Hilfe der Fourierschen Reihe gelieferten. Im § 2 werden wir eine Betrachtung über die Inhalte der von den Niveaukurven der Greenschen Funktion begrenzten Teilbereiche von B anstellen, verschiedene Integrale untersuchen und sie durch die Koeffizienten der Potenzreihe ausdrücken. Ferner werden wir eine Ungleichung für das Integral der Greenschen Funktion, erstreckt über B, beweisen, die wir dann im § 4 zur Abschätzung des ersten Eigenwertes benutzen werden. Im folgenden § 3 beschäftigen wir uns mit der funktionalen Abhängigkeit der Koeffizienten a_n der abbildenden Potenzreihe vom Bildpunkte $\zeta = \xi + i\eta$ (Quellpunkt der Greenschen Funktion von B) des Nullpunktes der w-Ebene. Diese Abhängigkeit wird in gewissen Rekursionsformeln zum Ausdruck kommen, aus denen wir dann noch einige Folgerungen ziehen. Der § 4 bringt Untersuchungen über die Eigenwerte des Bereiches B, in denen Resultate des § 3 benutzt werden. Insbesondere werden wir zeigen, daß $\frac{4\pi}{\mathsf{F}}$ die untere Grenze für λ_1, also auch für das Spektrum der Eigenwerte ist.

§ 1. Das isoperimetrische Problem.

Diesen Namen trägt bekanntlich die folgende Problemstellung: Es ist diejenige Kurve unter allen ebenen rektifizierbaren Jordankurven von gegebenem Umfange L, die den größten Flächeninhalt F einschließt, zu suchen. Die Lösung dieses Problems ist äquivalent mit dem Beweis der sog. isoperimetrischen Ungleichung

$$L^2 - 4\pi\mathsf{F} \geqq 0 \tag{1}$$

und der Bestimmung derjenigen Kurve, für die in dieser Un-

1) Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik.

gleichung das Gleichheitszeichen gilt. Bekanntlich ist der Kreis die Lösung des Problems.

Hier soll diese Lösung unter Benutzung der abbildenden Potenzreihe gegeben werden. Es sei

$$z = f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \qquad a_1 \neq 0, {}^{*)} \tag{2}$$

die den Einheitskreis der w-Ebene auf den von einer Kurve mit den genannten Eigenschaften begrenzten Bereich B abbildende Potenzreihe. Der Flächeninhalt F und der Umfang L dieses Bildbereiches werden durch die Integrale

$$\mathsf{F} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho \, d\varrho \, d\vartheta, \qquad L = \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\vartheta})| \, d\vartheta \tag{3}$$

angegeben. Wir führen, um die Integration von $|f'(e^{i\vartheta})|$ bequem ausführen zu können, die Funktion $F(w)$ ein, indem wir setzen **):

$$\begin{aligned} f'(w) &= \sum_1^{\infty} n \cdot a_n \cdot w^{n-1} = [F(w)]^2, \\ F(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot w^n; \qquad b_0^2 = a_1 \neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Zwischen den b_n und den a_n besteht diese Beziehung:

$$n \cdot a_n = b_0 \cdot b_{n-1} + b_1 \cdot b_{n-2} + b_2 \cdot b_{n-3} + \cdots + b_{n-1} \cdot b_0. \tag{5}$$

Es ist

$$L = \int_0^{2\pi} |F(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} b_n \cdot \bar{b}_m \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\vartheta} d\vartheta.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\vartheta} d\vartheta = \begin{cases} 0 \text{ für } n \neq m \\ 2\pi \text{ für } n = m, \end{cases}$$

so erhält man

$$L = 2\pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 {}^{**)}. \tag{6}$$

*) Ist $a_1 = 0$, so muß nach (4) und (5) auch $a_2 = 0$ sein, wenn der Ansatz (4) möglich sein soll; wir setzen dann $a_3 \neq 0$ voraus, wodurch in (12) b_0 durch b_1 und b_1 durch b_2 zu ersetzen ist.

**) Vgl. dazu Bieberbach, Berliner Berichte 1924, S. 181f. Dort wird die Frage nach der Konvergenz von (6) und der Existenz des zweiten Integrals von (3) erledigt.

Für den Flächeninhalt F ergibt die Integration

$$\mathsf{F} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n \cdot m \cdot a_n \cdot \bar{a}_m \varrho^{n+m-2} \cdot e^{i(n-m)\vartheta} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta,$$

$$\mathsf{F} = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |a_n|^2. \tag{7}$$

Zieht man jetzt die Schwarzsche Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cdot \beta_\nu\right|^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^2 \tag{8}$$

heran, und zwar in der speziellen Form

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\right|^2 \leqq n \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^2 \tag{9}$$

(das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn alle α_ν gleich sind), so erhält man

$$\begin{aligned} n^2 |a_n|^2 &= |b_0 \cdot b_{n-1} + b_1 \cdot b_{n-2} + \cdots|^2 \\ &\leqq n \cdot [|b_0 \cdot b_{n-1}|^2 + |b_1 \cdot b_{n-2}|^2 + \cdots + |b_{n-1} \cdot b_0|^2], \end{aligned} \tag{10}$$

wo das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn

$$b_0 \cdot b_{n-1} = b_1 \cdot b_{n-2} = b_2 \cdot b_{n-3} = \cdots = b_{n-1} \cdot b_0 \tag{11}$$

ist. Demnach ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} [|b_0 b_{n-1}|^2 + |b_1 \cdot b_{n-2}|^2 + \cdots] = [\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2]^2,$$

oder

$$\frac{\mathsf{F}}{\pi} \leqq \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

Damit ist die isoperimetrische Ungleichung bewiesen; es bleibt noch die Diskussion der Möglichkeit des Gleichheitszeichens. Notwendig und hinreichend dafür hat sich die Beziehung (11) erwiesen. Es muß also

$$b_{n-1} = \frac{b_1}{b_0} \cdot b_{n-2} = \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{b_1}{b_0} \cdot b_{n-3} = \cdots,$$

d. h.

$$b_n = \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^n \cdot b_0; \quad b_0 \neq 0 \tag{12}$$

sein. Die Funktion $F(w)$ hat also diese Gestalt

$$F(w) = b_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^n \cdot w^n = \frac{b_0^2}{b_0 - b_1 \cdot w}.$$

Da nun

$$f'(w) = [F(w)]^2 = \frac{b_0^4}{(b_0 - b_1 \cdot w)^2} \tag{13}$$

ist, so kann $f(w)$ entweder nur eine ganze lineare Funktion, wenn nämlich $b_1 = 0$ ist, oder aber nur eine linear gebrochene Funktion von w sein, und also, da der Inhalt des Bildbereiches endlich vorausgesetzt war, nur eine Kreisabbildung vermitteln.

Ob man den Beweis für die isoperimetrische Ungleichung auf diesem Wege schon geführt hat, habe ich aus der Literatur nicht ersehen können.

§ 2. Die Greensche Funktion und die Koeffizienten der abbildenden Potenzreihe.

Wenn $w = w(z)$ die zum Bereiche B gehörige Riemannsche Abbildungsfunktion und $G(x, y; \xi, \eta)$ die zur ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie gehörige Greensche Funktion des Bereiches B ist, so besteht, wenn der Quellpunkt $\zeta = \xi + i\eta$ bei der Abbildung durch die Funktion $w(z)$ dem Nullpunkt $w = 0$ der w-Ebene entspricht, zwischen beiden Funktionen die bekannte Beziehung

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\lg |w(z)|, \tag{1}$$

Im Falle, daß der Punkt ζ nicht auf den Nullpunkt $w = 0$, sondern auf einen Punkt $w(\zeta)$ abgebildet wird, braucht man den Einheitskreis nur in sich selbst zu transformieren:

$$\mathfrak{w}(z; \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(\zeta)\, w(z)}$$

und

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\lg |\mathfrak{w}(z; \zeta)|$$

zu nehmen.

Aus dieser Darstellung der Greenschen Funktion lassen sich ihre beiden Definitionseigenschaften ablesen: sie ist eine auf dem

Rande R von B verschwindende Potentialfunktion und verhält sich in B regulär mit Ausnahme des Quellpunktes, wo sie logarithmisch singulär wird.

Die Bildkurven der mit dem Einheitskreis konzentrischen Kreise $|w| = \varrho < 1$ heißen die Niveaukurven der Greenschen Funktion des Bereiches B; auf ihnen ist

$$(2) \qquad G(x, y;\ \xi, \eta) = -\lg \varrho = c,$$

wo c eine positive Konstante ist.

Die zu $w(z)$ gehörige Umkehrfunktion sei die Funktion

$$(3) \qquad z = f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

und zwar sei sie schon diejenige Funktion, die den Nullpunkt $w = 0$ in den Aufpunkt $z = \zeta$ der Greenschen Funktion überführt: $a_0 = \zeta$. Der Inhalt eines von der Niveaukurve (ϱ) begrenzten Teilbereiches B_ϱ von B ist dann gegeben durch

$$(4) \qquad \mathsf{F}(\varrho) = \int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \varrho^{2n}.$$

Vollzieht man den Grenzübergang $\varrho \to 1$, so ergibt sich für den Flächeninhalt des Gesamtbereiches

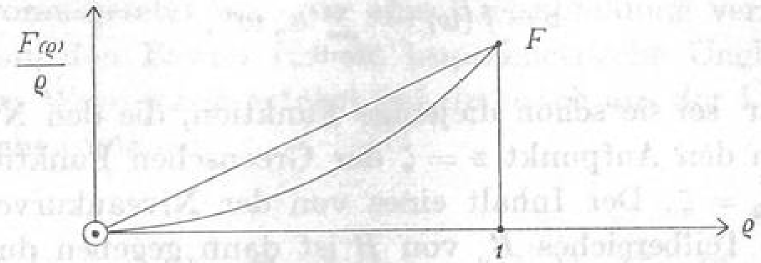
$$(5) \qquad \mathsf{F} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2.$$

Die Darstellung von $\mathsf{F}(\varrho)$ gestattet uns, der Frage des Wachstums des Inhaltes der Teilbereiche mit dem Radius ϱ des entsprechenden Kreises der w-Ebene nachzugehen. Zu diesem Zwecke untersuchen wir die Funktionen $\frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}$ und $\frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2}$; werden sie als Funktionen von ϱ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen, so liefern sie je eine monoton wachsende, nach unten konvexe Kurve. Es ist

$$(6) \qquad \frac{\mathsf{F}(\varrho_2)}{\varrho_2} \geqq \frac{\mathsf{F}(\varrho_1)}{\varrho_1}; \qquad \frac{\mathsf{F}(\varrho_2)}{\varrho_2^2} \geqq \frac{\mathsf{F}(\varrho_1)}{\varrho_1^2} \quad \text{für} \quad \varrho_2 > \varrho_1.$$

Dabei kann das Gleichheitszeichen dann und nur dann stehen, wenn $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$ ist, d. h. wenn der Bildbereich B ein Kreis um $\zeta = a_0$ ist.

Die Funktion $\frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}$ nimmt für $\varrho = 0$ den Wert 0 an und für $\varrho = 1$ den Wert F. Der Inhalt des von der Kurve $\frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}$ über $(0,1)$ begrenzten Flächenstückes wird durch das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho$ dargestellt und ist kleiner, höchstens gleich dem Inhalt des über dem Intervall $(0, 1)$ liegenden rechtwinkligen Dreiecks $(0, 1, \mathsf{F})$, also kleiner, höchstens gleich $\mathsf{F}/2$.



Damit haben wir die folgende Ungleichung

$$(7)\qquad \int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho \leqq \frac{\mathsf{F}}{2}$$

bewiesen. Das Gleichheitszeichen kann dann und nur dann stehen, wenn B ein Kreis um den Punkt $\zeta = a_0$ als Mittelpunkt ist. Das in der letzten Ungleichung auftretende Integral formen wir nun durch partielle Integration um:

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho = [\mathsf{F}(\varrho)\lg\varrho]_0^1 - \int\limits_0^1 \lg\varrho\,\mathsf{F}'(\varrho)\,d\varrho = -\int\limits_0^1 \lg\varrho\,\mathsf{F}'(\varrho)\,d\varrho,$$

$\lg\varrho\,\mathsf{F}(\varrho)$ verschwindet nämlich für $\varrho = 1$, aber auch für $\varrho = 0$, denn es ist schon

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho\cdot\lg\varrho = 0.$$

Nun ist aber

$$\mathsf{F}'(\varrho) = \int\limits_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho\,d\vartheta$$

und also

$$\int_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \lg \varrho\, |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Dieses letzte Integral ist aber nun nichts anderes als das in Polarkoordinaten der w-Ebene transformierte Integral der Greenschen Funktion, erstreckt über den Gesamtbereich B. Damit haben wir die Relation gewonnen

$$(8)\qquad \iint_B G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho.$$

Und mit ihr zugleich die Abschätzung

$$(9)\qquad \iint_B G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy \leqq \frac{\mathsf{F}}{2}, ^{*)}$$

wo das Gleichheitszeichen nur im Falle des Kreises mit $\zeta = \xi + i\eta$ als Mittelpunkt gilt.

Die Gleichung (8) erlaubt uns, das Integral über die Greensche Funktion durch die Koeffizienten der abbildenden Potenzreihe auszudrücken. Es ist nach Gleichung (4)

$$(10)\qquad \iint_B G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \; ^{*)}$$

Die Funktion $\mathsf{F}(\xi, \eta) = \iint_B G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy$ genügt bekanntlich der Differentialgleichung $\Delta \mathsf{F} = -2\pi$ und verschwindet auf dem Rande von B. Derselben Differentialgleichung genügt aber auch die Funktion $-\frac{\pi}{2}(\xi^2 + \eta^2) = -\frac{\pi}{2}|a_0|^2$. Schreiben wir demnach die Funktion $\mathsf{F}(\xi, \eta)$ in der Form

$$\mathsf{F}(\xi, \eta) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 - \frac{\pi}{2} |a_0|^2,$$

*) Vgl. M. Müller, Heidelberger Ber. 1929.

so stellt uns

$$(11) \qquad p(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

eine in B reguläre, stets positive Potentialfunktion dar, die auf dem Rande von B die Werte

$$p(\xi, \eta)|^R = (\xi^2 + \eta^2)|^R$$

annimmt und im Innern von B stets $> \xi^2 + \eta^2$ ist. Bezeichnen wir mit $R_{\min}$ den kleinsten Abstand eines Randpunktes vom Nullpunkt und mit $R_{\max}$ den größten, so gilt die Ungleichung $R^2_{\min} \leqq p(\xi, \eta) \leqq R^2_{\max}$. Die Funktion $p(\xi, \eta)$ kann übrigens dann und nur dann in B konstant sein, wenn B ein Kreis um $\zeta = 0$ ist.

Wir wenden uns nun der Funktion $\frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2}$ zu und betrachten das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2} \cdot d\varrho$. Aus der Gleichung (4) folgt nach erlaubter gliedweiser Integration

$$(12) \qquad \int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2} d\varrho = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|a_n|^2}{2n-1}.$$

Dieses Integral formen wir ebenfalls durch partielle Integration um. Es ist

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2} d\varrho = \left[-\frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}\right]_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{1}{\varrho} \cdot \mathsf{F}'(\varrho)\, d\varrho$$

$$= -\mathsf{F} + \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho} |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Das auf der rechten Seite auftretende Integral ist nun aber das in Polarkoordinaten transformierte Integral

$$\iint\limits_B e^{G(x, y; \xi, \eta)}\, dx\, dy = \iint\limits_B \frac{dx\, dy}{|w(z)|},$$

dessen Existenz leicht nachweisbar ist. Damit haben wir die Beziehung gewonnen

$$(13)\qquad \iint\limits_B e^{G(x,y;\xi,\eta)}\,dx\,dy = \mathsf{F} + \int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2}\,d\varrho$$

oder, wie man diese auch schreiben kann,

$$(14)\qquad \iint\limits_B \left(\frac{1}{|w(z)|} - 1\right) dx\,dy = \int\limits_0^1 \frac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2}\,d\varrho.$$

Den Integranden links kann man übrigens geometrisch als Fläche deuten, ähnlich wie es Jensen[1]) bei $|w(z)|^2$ getan hat. Man erhält so eine auf dem Rande von B aufsitzende Fläche, die über dem Punkte ζ einen unendlich fernen Gipfel trägt. Zur näheren Diskussion des Verlaufes dieser Fläche kann man den Winkel α, den die Tangentialebene der Fläche mit der z-Ebene einschließt, berechnen. Es ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|w'(z)|}{|w(z)|^2}.$$

Ist der Bereich B ein Kreis vom Radius R, so ist die Fläche eine Rotationsfläche, deren Meridian ein Stück eines Hyperbelastes ist. In diesem Falle läßt sich auch das Integral (13) angeben:

$$(15)\qquad \iint\limits_B e^{G(x,y;\xi,\eta)}\,dx\,dy = R^2\cdot\pi + \frac{\pi}{2}\left[R^2 - (\xi^2+\eta^2)\right]$$

$$+ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{(R^2-\xi^2-\eta^2)^2}{R^2}\cdot\lg\frac{R+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{R-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

Zu dieser Gleichung kommt man leicht, wenn man zu den Gleichungen (12) und (13) noch die Gleichung (10) vom § 3 hinzunimmt.

1) Jensen, Acta Math. Bd. 36 (1912).

Dem letzten Integral stellen wir das Integral

$$\iint\limits_B e^{-G(x,y;\xi,\eta)}\,d\,x\,d\,y = \iint\limits_B |\,w(z)\,|\,d\,x\,d\,y$$

zur Seite. Transformation in Polarkoordinaten der w-Ebene liefert bei Berücksichtigung von Gleichung (4)

$$(16) \qquad \iint\limits_B e^{-G(x,y;\xi,\eta)}\,d\,x\,d\,y = 2\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\,|\,a_n\,|^2}{2n+1}.$$

Zerspaltet man die Summe rechts, so ergibt sich noch:

$$(17) \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint\limits_B e^{-G(x,y;\xi,\eta)}\,d\,x\,d\,y = \mathsf{F} - \int_0^1 \mathsf{F}(\varrho)\,d\varrho & \text{oder} \\ \displaystyle\iint\limits_B \left[1 - |\,w(z)\,|\right]d\,x\,d\,y = \int_0^1 \mathsf{F}(\varrho)\,d\varrho. \end{cases}$$

Die Integrale über die Funktionen $\mathsf{F}(\varrho)$, $\dfrac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho}$, $\dfrac{\mathsf{F}(\varrho)}{\varrho^2}$ haben wir damit in Beziehung gesetzt zu Integralen der Greenschen Funktion und diese zugleich durch die Koeffizienten der abbildenden Potenzreihe ausgedrückt.

Als weiteres Integral dieser Art betrachten wir noch

$$\iint\limits_B |\,w(z)\,|^2\,d\,x\,d\,y = \iint\limits_B e^{-2G(x,y;\xi,\eta)}\,d\,x\,d\,y.$$

Man erhält leicht

$$(18) \qquad \iint\limits_B e^{-2G}\,d\,x\,d\,y = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\,|\,a_n\,|^2}{n+1}$$

Spaltung der rechten Summe in $\pi\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{|\,a_n\,|^2}{n+1}$, $\pi\sum\limits_1^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2$ und

$-\pi\sum|a_n|^2$, wo die erste Summe gleich $\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}|f(\varrho e^{i\vartheta})|^2\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta$ ist, die zweite den Flächeninhalt F und die letzte $\int\limits_0^{2\pi}|f(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta$ darstellt, führt zu der Beziehung

$$(19)\qquad \iint\limits_B[1-|w(z)|^2]\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}[|f(e^{i\vartheta})|^2-|f(\varrho\,e^{i\vartheta})|^2]\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Nunmehr wollen wir die schon in der Einleitung erwähnten Integrale

$$\mathsf{F}_m(\xi,\eta)=\iint\limits_B[G(x,y;\xi,\eta)]^m\,dx\,dy\qquad(m=1,2,3,\ldots)$$

untersuchen. Wir werden diese Integrale ebenfalls durch die Koeffizienten a_n der abbildenden Potenzreihe ausdrücken und diese Relationen finden:

$$(20)\qquad \mathsf{F}_m(\xi,\eta)=\frac{\pi\cdot m!}{2^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{m-1}}\,^{*)}.$$

Die Funktionen $F_m(\xi,\eta)$ sind alle in B positiv und verschwinden auf dem Rande von B. Für sie gelten die Abschätzungen

$$\frac{1}{m!}\mathsf{F}_m(\xi,\eta)\leqq\frac{\mathsf{F}}{2^m}.$$

Bildet man also mit diesen Funktionen die Reihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\mathsf{F}_m(\xi,\eta)}{m!}$, so besitzt diese in der Reihe $\mathsf{F}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)$ eine Majorante; ihre absolute und gleichmäßige Konvergenz für alle Punkte von $B+R$ ist damit sichergestellt. Man darf also Integration und Summation vertauschen und erhält:

$$(21)\qquad \iint\limits_B e^{G(x,y;\,\xi,\eta)}\,dx\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathsf{F}_m(\xi,\eta)}{m!}.$$

Betrachten wir noch kurz die Integrale der ganzzahligen Potenzen der Greenschen Funktion über den Teilbereich B_ϱ

$$\mathsf{F}_m(\xi,\eta;\varrho)=\iint\limits_{B_\varrho}[G(x,y;\xi,\eta)]^m\,dx\,dy.$$

*) M. Müller, Heidelberger Ber. 1929.

In Analogie zum Falle $m = 0$ bilden wir auch hier die Funktion $\frac{\mathsf{F}_m(\xi, \eta; \varrho)}{\varrho}$ und erstrecken ihr Integral über das Intervall $(0, 1)$. Wir erhalten ganz entsprechend

$$(22) \qquad \mathsf{F}_{m+1}(\xi, \eta) = \int_0^1 \frac{\mathsf{F}_m(\xi, \eta; \varrho)}{\varrho} d\varrho \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

In (22) ist (8) als Spezialfall für $m = 0$ enthalten.

Die Funktionen $\mathsf{F}_m(\xi, \eta)$ sind Spezialfälle der allgemeinen Funktion der komplexen Variablen $\sigma + i\tau = s$

$$f(s) = \iint_B [G(x, y;\ \xi, \eta)]^s \, dx \, dy .$$

Diese Funktion läßt sich durch eine Dirichletsche Reihe mit nur positiven Koeffizienten darstellen. Es ist nämlich:

$$f(s) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-\lg \varrho)^s \, |f'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \varrho \, d\varrho \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \cdot \int_0^1 (-\lg \varrho)^s \varrho^{2n-1} \cdot d\varrho .$$

Um die rechtsstehenden Integrale, deren Existenz leicht nachweisbar ist, zu berechnen, transformieren wir in die Variable

$$z = -2n \cdot \lg \varrho; \qquad \varrho = e^{-\frac{z}{2n}}$$

und erhalten:

$$\int_0^1 (-\lg \varrho)^s \varrho^{2n-1} d\varrho = \frac{1}{(2n)^{s+1}} \cdot \int_0^\infty z^s e^{-z} \cdot dz = \frac{\Gamma(s+1)}{(2n)^{s+1}} .$$

Demnach ist

$$(23) \qquad f(s) = \frac{\pi \Gamma(s+1)}{2^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{s-1}} .$$

In (23) ist (20) als Spezialfall für $s = m$ enthalten. Die Darstellung der Funktion $f(s)$ durch eine Dirichletsche Reihe gestattet es, der Untersuchung ihres Konvergenzbereiches näherzutreten, was aber hier im einzelnen nicht mehr durchgeführt werden soll.

Auf diese Weise läßt sich also jedem Bereiche B eine Dirichletsche Reihe mit nur positiven Koeffizienten zuordnen. Insbesondere entspricht dem Koebeschen Schlitzbereich, auf den der Einheitskreis durch die Koebesche Extremalfunktion abgebildet wird, die Riemannsche Zetafunktion.

§ 3. Über die Abhängigkeit der Koeffizienten der abbildenden Potenzreihe vom Quellpunkt der Greenschen Funktion.

Die Formeln des § 2 machen ersichtlich, daß die Koeffizienten der abbildenden Potenzreihe Funktionen von ξ und η sind. Diese ihre funktionale Abhängigkeit vom Punkte ζ oder, was dasselbe ist, vom Punkte τ, dem Bildpunkte des Punktes ζ, soll in diesem § 3 Gegenstand der Untersuchung sein.

Die Funktion

$$(1) \qquad z = \varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

leiste die konforme Abbildung des Einheitskreises der w-Ebene auf den Bereich B der z-Ebene, so daß dem Nullpunkte der w-Ebene der Nullpunkt der z-Ebene entspricht. Der Bildpunkt des Punktes $w = \tau$ soll der Punkt $z = \zeta$ sein:

$$\zeta = \varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tau^n.$$

Wir fragen nun nach der Funktion

$$(2) \qquad z = f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

die den Einheitskreis ebenfalls auf den Bereich B abbildet, aber den Nullpunkt der w-Ebene in den Punkt $z = \zeta$ überführt:

$$(3) \qquad f(0) = a_0 = \zeta.$$

Die Abbildung, die diese Funktion leistet, können wir in zwei Schritten vollzogen denken: Zuerst bilden wir den Einheitskreis durch die linear gebrochene Funktion

$$(4) \qquad t = \frac{w + \tau}{1 + \bar{\tau} \cdot w}; \quad w = \frac{t - \tau}{1 - \bar{\tau} \cdot t}$$

auf den Einheitskreis der t-Ebene ab; dabei wird der Nullpunkt der w-Ebene in den Punkt $t = \tau$ verlegt. Nunmehr bilden wir den Einheitskreis der t-Ebene mittels der Funktion

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{w+\tau}{1+\bar{\tau}\cdot w}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{w+\tau}{1+\bar{\tau}\cdot w}\right)^n$$

auf den Bereich B ab. Damit haben wir die gewünschte Abbildung geleistet. Es besteht demnach diese Gleichung:

$$(5) \quad f(w;\tau) = \varphi\left(\frac{w+\tau}{1+\bar{\tau}\cdot w}\right) \text{ oder } \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{w+\tau}{1+\bar{\tau}\cdot w}\right)^n.$$

Die erste Gleichung besagt, daß $f(w;\tau)$ auch eine analytische Funktion von τ oder, wie wir auch sagen können, von ζ ist:

$$f(w) = f(w;\zeta).$$

Die zweite Gleichung enthält die Abhängigkeit der Koeffizienten a_n von τ bzw. ζ, die durch Koeffizientenvergleich näher untersucht werden könnte. Wir wollen hier aber für den allgemeinen Fall einen anderen Weg einschlagen: Es ist bekanntlich

$$(6) \qquad \varphi^{(m)}(\tau) = \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(t)}{(t-\tau)^{m+1}} \cdot dt,$$

wo das Integral etwa über den Kreis $|t| = \varrho < 1$, der den Punkt τ enthält, zu erstrecken ist. Führen wir die linear gebrochene Transformation (4) ein, so wird

$$dt = \frac{1-|\tau|^2}{(1+\bar{\tau}\cdot w)^2} \cdot dw; \qquad t - \tau = w\,\frac{1-|\tau|^2}{1+\bar{\tau}\cdot w},$$

so daß also das obige Integral in das Integral

$$\varphi^{(m)}(\tau) = \frac{m!}{(1-|\tau|^2)^m} \frac{1}{2\pi i} \oint f(w) \frac{(1+\bar{\tau}\cdot w)^{m-1}}{w^{m+1}} dw,$$

zu erstrecken über den Kreis $\left|\dfrac{w+\tau}{1+\bar{\tau}\cdot w}\right| = \varrho < 1$, der den Nullpunkt enthält, übergeht. Setzen wir in diesem Integral für $f(w)$ die Potenzreihenentwicklung ein, so ergibt sich

$$\frac{(1-|\tau|^2)^m}{m!}\cdot\varphi^{(m)}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint w^{n-m-1}(1+\bar{\tau}\,w)^{m-1}\,dw$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{m-1}{\nu}\bar{\tau}^{\nu}\cdot a_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint w^{n-m+\nu-1}\,dw.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2\pi i}\oint w^{n-m+\nu-1}\,dw=\begin{cases}0 \text{ für } n+\nu-m\neq 0\\ 1 \text{ für } n+\nu-m=0,\end{cases}$$

so daß in der Reihe rechts nur diejenigen Glieder einen Beitrag liefern, für die $n+\nu=m$ ist. Da zu $n=0$ $\nu=m$ gehört und $\binom{m-1}{m}=0$ ist, tritt a_0 nicht auf. Wir gewinnen somit diese Rekursionsformeln:

$$(7)\qquad \frac{(1-|\tau|^2)^m}{m!}\,\varphi^{(m)}(\tau)=\sum_{\nu=1}^{m}\binom{m-1}{m-\nu}\bar{\tau}^{m-\nu}\cdot a_\nu.$$

Für $m=1,2,3$ lauten sie:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &a_1(\tau)=(1-|\tau|^2)\cdot\varphi'(\tau);\\ &a_2(\tau)+\bar{\tau}\cdot a_1(\tau)=\frac{(1-|\tau|^2)^2}{2!}\varphi''(\tau);\\ &a_3(\tau)+\binom{2}{1}\bar{\tau}\cdot a_2(\tau)\\ &\qquad+\bar{\tau}^2\cdot a_1(\tau)=\frac{(1-|\tau|^2)^3}{3!}\cdot\varphi'''(\tau).\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen werden wir später noch benutzen. Aus den Gleichungen (7) lassen sich die $a_n(\tau)$ rekursiv durch $\bar{\tau}$ und die Ableitungen der Funktion $\varphi(w)$ in dem Punkte τ ausdrücken.

Betrachten wir einmal den Fall, daß der Bereich B ein Kreis um den Nullpunkt der z-Ebene mit dem Radius R ist. Dann ist

$$\varphi(w)=R\cdot w$$

und also

$$f(w)=R\,\frac{w+\tau}{1+\bar{\tau}\cdot w}=R\,(w+\tau)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\bar{\tau}^n\cdot w^n.$$

Es ist demnach

$$(9) \qquad a_0 = R \cdot \tau\,; \qquad a_1 = R\,(1 - |\,\tau\,|^2)\,; \qquad a_n = (-1)^{n-1}\,\bar{\tau}^{n-1}\,a_1$$

oder

$$(10) \quad a_0 = \zeta\,; \qquad a_1 = \frac{R^2 - |\,\zeta\,|^2}{R}\,; \qquad a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{\bar{\zeta}}{R}\right)^{n-1} a_1\,.$$

Diese Beziehungen erhält man natürlich auch aus den Rekursionsformeln (7). Im Falle des Kreises läßt sich also die Abhängigkeit der Koeffizienten a_n vom Punkte τ bzw. ζ explizit angeben, so daß man diese Abhängigkeit sehr leicht näher untersuchen kann.

Zunächst sieht man sofort, daß alle a_n verschwinden, wenn der Punkt ζ auf den Rand des Kreises $|\,z\,| = R$ oder, was dasselbe ist, wenn der Punkt τ auf den Rand des Einheitskreises rückt. Die Funktion $f(w)$ hat dann die Gestalt $f(w) = a_0 = \zeta$, d. h. sie leistet nicht mehr die Abbildung des Einheitskreises auf den Kreis $|\,z\,| = R$.

Weiterhin wollen wir den Laplaceschen Differentialausdruck $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ von den Absolutbeträgen der $a_n(\zeta)$ bilden. Man findet

$$\Delta\,|\,a_1\,| = -\frac{4}{R}$$

und

$$\Delta\,|\,a_n\,| = (n-1)^2\,\frac{\varrho^{n-3}}{R^{n-2}} - (n+1)^2 \cdot \frac{\varrho^{n-1}}{R^n}$$

und daraus

$$\Delta\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\,a_n\,|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\,|\,a_n\,| = \frac{1}{\varrho}\,.$$

Wir bilden noch den Laplaceschen Differentialausdruck für $|\,a_1\,|^2$:

$$\Delta\,|\,a_1\,|^2 = 16\,\frac{\varrho^2}{R^2} - 8\,.$$

Für die $\Delta\,|\,a_n\,|^2$ $(n = 2, 3, \ldots)$ ergeben sich schon wenig übersichtliche Ausdrücke.

Wir kehren nun wieder zum allgemeinen Bereich B zurück und setzen zunächst nur voraus, daß die abbildende Funktion

$$f(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$$

schlicht ist. Für die Koeffizienten a_1 und a_2 einer solchen Funktion gilt bekanntlich die Ungleichung[1])

$$|a_2| \leqq 2\,|a_1|.$$

Setzt man in diese Ungleichung die sich aus den beiden ersten der Gleichungen (8) ergebenden Ausdrücke für a_1 und a_2 ein, so gelangt man auf bekannte Weise zum Koebeschen Verzerrungssatz für die Funktion $\varphi(w)$ und ihre Ableitung. Nun besteht neben der obigen Ungleichung noch die andere, ebenfalls bei Bieberbach[1]) sich findende Ungleichung

$$|a_2^2 - a_1 \cdot a_3| \leqq |a_1|^2.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier ebenfalls nur für die Koebesche Extremalfunktion. Bildet man nun mit Hilfe der drei ersten Gleichungen (8) den Ausdruck $a_2^2 - a_1 . a_3$, so findet man

$$a_2^2 - a_1 \cdot a_3 = (1 - |\tau|^2)^4 \left[\left(\frac{\varphi''(\tau)}{2!}\right)^2 - \frac{\varphi'(\tau)}{1!} \cdot \frac{\varphi'''(\tau)}{3!}\right].$$

Man gelangt so zu der Ungleichung

$$\left|\frac{2\varphi'(\tau)\cdot\varphi'''(\tau) - 3\,\varphi''^2(\tau)}{2\varphi'^2(\tau)}\right| \leqq \frac{3!}{(1-|\tau|^2)^2}.$$

Der links auftretende Differentialausdruck ist der sog. Schwarzsche Differentialparameter $[\varphi]_\tau$ für die Funktion $\varphi(\tau)$. Für ihn gilt also im Falle, daß die Funktion $\varphi(w)$ schlicht ist, die obige Ungleichung. Wie die Funktion $\varphi(w)$ selbst, kann auch er bei Annäherung des Punktes w an den Rand des Einheitskreises nur wie das Quadrat des reziproken Abstandes des Punktes w von der Peripherie unendlich werden. Ist der Bereich B ein Kreisbogenpolygon, so genügt im besonderen die Funktion $\varphi(w)$ einer Differentialgleichung, deren linke Seite durch den Schwarzschen Differentialparameter dargestellt wird. Ist die durch die

1) Bieberbach, Berliner Sitzungsber. 1916, S. 940ff.

Funktion $\varphi(w)$ geleistete Abbildung schlicht, so kann demnach die obige Ungleichung als Ergänzung des Koebeschen Verzerrungssatzes aufgefaßt werden.

Wir untersuchen noch die Frage nach dem Verhalten der Funktionen $a_n(\tau)$ auf dem Rande des Einheitskreises. Für den Fall, daß der Bildbereich B ein Kreis ist, verschwinden, wie wir schon sahen, alle $a_n(\tau)$ auf dem Rande. Für den allgemeinen Fall wollen wir voraussetzen, daß der Bereich B endlichen inneren Inhalt hat. Dann existiert das Integral (10) von § 2 und verschwindet auf dem Rande von B. Auf dem Rande müssen demnach alle $|a_n|^2$ einzeln verschwinden; d. h. alle Funktionen $a_n(\tau)$ verschwinden bei Annäherung des Punktes τ an den Kreisrand, falls die Funktion $f(w;\tau)=a_0+a_1 w+a_2 w^2+\cdots$ den Einheitskreis auf einen Bereich von endlichem inneren Inhalt abbildet. Aus dieser Tatsache folgt noch auf Grund der ersten von den Gleichungen (8), daß die Ableitung einer solchen Funktion $\varphi(\tau)$ bei Annäherung des Punktes w an den Rand nur von geringerer als erster Ordnung unendlich werden kann.

§ 4. Über die Eigenwerte des Bereiches.

Schon in der Einleitung haben wir auf die Eigenwerte λ_n des Randwertproblemes

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda u = 0, \qquad u|^R = 0$$

und ihre Abhängigkeit von der Gestalt und dem Inhalt des Bereiches B hingewiesen. Nunmehr wollen wir eine untere Grenze, die nur vom Inhalt des Bereiches abhängt, für das Spektrum des Problemes (1) angeben. Wir gewinnen sie mit Hilfe eines von Picard[1]) angegebenen Verfahrens sukzessiver Approximation für partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, das wir hier für das zum Randwertproblem (1) gehörige Problem mit inhomogenen Randbedingungen

$$(2) \qquad \Delta u + \varkappa u = 0, \qquad u|^R = h(s),$$

wo $h(s)$ eine stetige Funktion der Bogenlänge s auf dem Rande R von B ist, anwenden.

1) Picard, Journ. de Math. (4) Bd. 6 (1890), S. 145f.

Die Picardsche Methode zur Gewinnung der Lösung des Problems (2) werde hier kurz skizziert: Man geht aus von folgenden Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_n + \varkappa u_{n-1} = 0, \end{cases}$$

$$n = 2, 3 \ldots$$

und bestimmt aus ihnen eine unendliche Folge von Funktionen $u_1, u_2, u_3 \ldots$ derart, daß auf dem Rande

$$(4)\qquad u_1|^R = h(s), \qquad u_n|^R = 0 \qquad (n = 2, 3 \ldots)$$

ist, eine Aufgabe, deren Lösung nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie stets möglich ist. Mit diesen Funktionen bildet man alsdann die Reihe

$$(5)\qquad u_1(x, y) + u_2(x, y) + \cdots + u_n(x, y) + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert nun gleichmäßig gegen eine Funktion $u(x, y)$, die auf dem Rande R von B die vorgeschriebenen Werte annimmt und der Differentialgleichung (2) genügt, solange

$$(6)\qquad |\varkappa| \cdot M < 1$$

ist, wenn mit M der Maximalwert von $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_B G(x, y;\, \xi, \eta),\, dx\, dy$ bezeichnet wird. Aus dieser Ungleichung folgert man gewöhnlich, daß dies der Fall ist, wenn der Flächeninhalt des Bereiches B nur hinreichend klein gemacht werden kann. Wir wollen hier jedoch den Flächeninhalt von beliebiger endlicher Größe voraussetzen, dann können wir aus (6) unter Berücksichtigung der Ungleichung (9) von § 2 bezüglich $|\varkappa|$ schließen, daß für

$$|\varkappa| \leqq \frac{4\pi}{F}$$

die Reihe (5) konvergent ist. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Das inhomogene Problem (2) besitzt sicherlich Lösungen für alle Werte des Parameters $\varkappa$, für die

$$(7) \qquad -\frac{4\pi}{\mathsf{F}} \leqq \varkappa \leqq +\frac{4\pi}{\mathsf{F}}.$$

Nehmen wir nun an, $\varkappa$ falle mit dem ersten Eigenwert des homogenen Problemes (1) zusammen; dann weiß man aber aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus, daß für $\varkappa = \lambda_1$ das Problem (2) keine Lösung besitzen kann[1]). Wir schließen also, daß

$$(8) \qquad \lambda_1 > \frac{4\pi}{\mathsf{F}}$$

sein muß. Für das Spektrum der Eigenwerte des Problemes (1) ist also

$$\frac{4\pi}{\mathsf{F}} < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \simeq \frac{4\pi}{\mathsf{F}} n \leqq \cdots.$$

Die untere Grenze für den ersten Eigenwert ist übrigens der Faktor von n im asymptotischen Gesetz von Weyl-Courant: $\lambda_n \simeq \frac{4\pi}{\mathsf{F}} n$. Der genaue Wert des ersten Eigenwertes ist $\lambda_1 = \frac{4\pi}{\mathsf{F}} + c_1(B)$. Dabei ist $c_1(B)$ eine positive Konstante, die die Abhängigkeit des ersten Eigenwertes von der Gestalt des Bereiches ausdrückt; sie ist für den Kreis bekanntlich kleiner als für jeden anderen Bereich vom selben Flächeninhalt.

Für den Einheitskreis und das Quadrat läßt sich die Ungleichung (8) numerisch prüfen. Für den Einheitskreis ist λ_1 nämlich das Quadrat der ersten Nullstelle der Besselschen Funktion nullter Ordnung $J_0(\varrho)$ und diese liegt im Punkte $\varrho_1 = 2{,}40483$, so daß also in der Tat $\varrho_1^2 > \frac{4\pi}{\mathsf{F}} = 4$ ist. Im Falle des Quadrates mit der Seitenlänge a sind

$$\lambda = \frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2) \qquad (m, n = 1, 2, 3 \ldots)$$

1) Lichtenstein, Enzyklop. d. math. Wiss. II. Bd., 3. Teil, 2. Hälfte.

die Eigenwerte. Auch hier ist

$$\lambda_1 = \frac{2\pi^2}{a^2} > \frac{4\pi}{\mathsf{F}} = \frac{4\pi}{a^2}.$$

Wir geben noch eine Abschätzung für die Summe der reziproken Eigenwertquadrate; für sie gilt die bekannte Relation von E. Schmidt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \iint_B \iint_B G^2(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta, \tag{9}$$

so daß also die Ungleichung besteht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{\mathsf{F}^2}{2}. \tag{10}$$

Aus ihr kann man übrigens die schwächere Abschätzung $\lambda_1 > \frac{\sqrt{2}}{\mathsf{F}}$ für den ersten Eigenwert gewinnen.

Die Summe der reziproken Eigenwertquadrate läßt sich ebenfalls leicht in Beziehung setzen zu den Koeffizienten der abbildenden Potenzreihe; es ist nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{\pi}{2} \iint_B \Big(\sum_1^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n} \Big) d\xi\, d\eta = \frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{n}, \tag{11}$$

wenn wir

$$\iint_B |a_n|^2 d\xi\, d\eta = A_n \tag{12}$$

setzen.

Die A_n lassen sich für den allgemeinen Bereich nicht explizit angeben; schon beim ersten A_1 stößt man auf Schwierigkeiten:

$$A_1 = \iint_B (1 - |\tau|^2) |\varphi'(\tau)|^2 d\xi\, d\eta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \varrho^2)^2 |\varphi'(\varrho e^{i\vartheta})|^4 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta;$$

dieses Integral ist allgemein nicht auswertbar.

Wählt man aber als Bereich B einen Kreis oder ein Quadrat, so lassen sich für jenen die A_n einzeln ausrechnen und für dieses läßt sich eine Abschätzung des ersten A_1 angeben. Wenn B ein Kreis ist, so gelten die Gleichungen (10) von § 3 und die A_n berechnen sich leicht zu:

$$(13)\quad A_n = \pi R^4 \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] = \frac{2\pi R^4}{n(n+1)(n+2)}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Kenntnis der A_n und der Eigenwerte λ_n für den Kreis gestattet uns, eine interessante Beziehung über die Nullstellen der Besselschen Funktionen abzuleiten:

Bekanntlich sind die Besselschen Funktionen die Eigenfunktionen des Problemes (1) für den Kreis, und die Quadrate ihrer sämtlichen Nullstellen sind die Eigenwerte für den Einheitskreis; bezeichnen wir die Nullstellen der $n$ten Besselschen Funktion $J_n(\varrho)$ mit $k_{n,m}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $(m = 1, 2, 3 \ldots)$ und berücksichtigen wir, daß auch die negativen Wurzeln dieselben Eigenwerte liefern, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_{m,n}^4} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n}.$$

Unter Benutzung von Gleichung (13) für $R = 1$ erhält man:

$$2 \sum_{m,n} \frac{1}{k_{m,n}^4} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)}\right]$$
$$= \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{\pi^2}{6} - 2 + \frac{3}{4}\right]$$

und also

$$(14)\quad \sum_{m,n} \frac{1}{k_{m,n}^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}\right).$$

Die rechte Seite hat, wenn $\pi = 3{,}1416$ genommen wird, den Wert 0,974. Dieses Resultat steht mit der Ungleichung (10) in Einklang.

Ist der Bereich B ein Quadrat, so läßt sich A_1 mit Hilfe des elliptischen Integrals, das die Abbildung des E-Kreises auf das Quadrat leistet, leicht zwischen 2 Grenzen einklemmen.

Lebenslauf.

Am 15. Mai 1907 wurde ich, Wilhelm Kraus, in Lich (Hessen) als Sohn des Kaufmanns Wilhelm Kraus geboren. Ich besuchte das Realgymnasium in Gießen und bestand dort Ostern 1926 die Reifeprüfung. Darauf studierte ich Mathematik und Physik an den Universitäten Gießen, Göttingen und Berlin. Im Sommersemester 1930 bestand ich in Gießen das Staatsexamen für das höhere Lehramt und bin seit Herbst 1930 im Vorbereitungsdienst für das höhere Lehramt an der Oberrealschule in Gießen.

In Göttingen hörte ich Vorlesungen und Übungen bei den Herren Professoren: Bernays, Grandjot, Courant, Hilbert, Herglotz, Prandtl, van der Waerden;

in Berlin bei den Herren Professoren: Hammerstein, Henning, Hopf, von Laue, Planck, Schmidt, Schrödinger, Schur.

Meine akademischen Lehrer in Gießen waren die Herren Professoren: Cermak, Engel, Falckenberg, Geppert, Jaffé, König, Schlesinger. Ihnen allen bin ich zu großem Danke verpflichtet. Die vorliegende Arbeit wurde von Herrn Professor Dr. Geppert angeregt. Ihm dafür wie für die Förderung, die ich in meinem Studium durch ihn erfahren habe, meinen verbindlichsten Dank sagen zu können, ist mir eine angenehme Pflicht.