

5. INTEGROINTI

5.2 PINTA-ALAT SUMMIEN RAJA-ARVONA

5.2.3 Tasavälinen jako

Tasavälisessä jaossa

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

kaikilla i , joten

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Siis R :n ala

$$\text{Ala}(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Esimerkki. Olkoon $f(x) = x + 1$ välillä $[0, 2]$. Siis $a = 0$ ja $b = 2$. Tehdään tasavälinen jako, jolloin $\Delta x = \frac{2}{n}$. Siis

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{n}, \quad x_2 = \frac{4}{n}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{2n}{n} = 2$$

eli

$$x_i = \frac{2i}{n}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} + 1 \right) \stackrel{LIN}{=} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{2(2n+1)}{n} = 4 + \frac{2}{n} \rightarrow 4, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Tarvittiin summan lineaarisuutta ja aritmeettisen summan kaavaa.

Videolla tarkastellaan funktiota $f(x) = x^2$ välillä $[0, b]$ ja funktiota $f(x) = e^x$ välillä $[0, b]$.

VIITTEET

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivun 291.