5. Integrointi

5.3 Määrätty integraali

5.3.1 Jaot ja Riemannin summat

Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$. Jaetaan väli $[a,b]$ yhteensä n:ään osaväliin jakopisteillä

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Joukko $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ on *jako* eli *ositus*. Jaon *normi* on

$$||P|| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i, \quad \text{missä} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Koska f saa suurimman ja pienimmän arvon osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$, on olemassa kohdat $l_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ siten, että

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i).$$

Olkoon A_i käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[x_{i-1}, x_i]$. Saadaan

$$f(l_i)\Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i)\Delta x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Siis käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala A välillä $[a,b]$ toteuttaa

$$\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i.$$

Määritelmä. Funktioon f ja jakoon P liittyvät

- *Riemannin alasumma*

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

- *Riemannin yläsumma*

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivut 302–303.