

5. INTEGROINTI

5.3 MÄÄRÄTTY INTEGRAALI

5.3.2 Määrätty integraali

Määritelmä. Jos P_1 ja P_2 ovat välin $[a, b]$ jakoja siten, että $P_1 \subset P_2$, niin jaossa P_2 on enemmän jakopisteitä kuin jaossa P_1 . Sanotaan, että P_2 on *hienompi* (tai *tiheämpi*) kuin P_1 .

Huom. Jos $P_1 \subset P_2$, niin

$$L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq U(f, P_2) \leq U(f, P_1).$$

Yleisesti: Jos P ja P' ovat mitkä hyvänsä kaksi välin $[a, b]$ jakoa, niin

$$L(f, P) \leq U(f, P').$$

On siis olemassa *ainakin yksi* sellainen luku I , että

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P).$$

Määritelmä: Jos on olemassa *täsmälleen yksi* luku I siten, että

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

kaikilla välin $[a, b]$ jaoilla P , niin

- f on (Riemann) *integroituva* välillä $[a, b]$
- Luku I on funktion f *määrätty integraali* välillä $[a, b]$.

Merkitään

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Voidaan todistaa:

Lause. Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin f on integroituva välillä $[a, b]$.

VIITTEET

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivut 302–303.