5. Integrointi

5.3 Määrätty integraali

5.3.5 Yleinen Riemannin summa, esimerkkejä

Pisteet $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ eli *tägit* voidaan siis valita miten tahansa ja silti joka tapauksessa

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \to \int_a^b f(x)dx,$$

kun $n \to \infty$ ja $||P|| \to 0$, kun f on integroituva välillä $[a, b]$.

Valinnoilla $c_i = x_{i-1}$ ja $c_i = x_i$, saadaan vasen ja oikea päätepistemenetelmä

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i, \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Jos valitaan $c_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, niin saadaan keskipistemenetelmä (M niinkuin “mean”)

$$M_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

Numeerisissa menetelmissä eri menetelmiä yhdistetään vielä keskenään. Nimittäin, jos päätepistemenetelmien antamista tuloksista otetaan keskiarvo, saadaan puolisuunnikasmenetelmä (T niinkuin trapezoidi):

$$T_n(f) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x_i.$$

Edelleen, jos keskipistemenetelmästä ja puolisuunnikasmenetelmästä otetaan painotettu keskiarvo, saadaan Simpsonin menetelmä:

$$S_n = \frac{2T_n + M_n}{3}.$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivut 305–306.