5. Integrointi

5.4 Määrätyn integraalin ominaisuuksia

5.4.4 Integraalilaskennan väliarvolause, todistus

Lause. (Integraalilaskennan väliarvolause) Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen kohta $c \in [a, b]$, että

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Todistus. Suljetulla välillä jatkuva funktio saa SA:n ja PA:n, joten on olemassa kohdat $l, u \in [a, b]$ siten, että

$$f(l) \le f(x) \le f(u)$$

kaikilla $x \in [a, b]$. Merkitään $m = f(l)$ ja $M = f(u)$. Olkoon $P = \{x_0 = a, x_1 = b\}$ välin $[a, b]$ jako yhteen osaväliin. Tällöin

$$L(f, P) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f, P).$$

Siis

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Jaetaan $b - a$:lla, jolloin saadaan

$$m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{\text{luku}} \le M.$$

Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen kohta $c \in [a, b]$, että

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

eli

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivut 305–306.