5. Integrointi

5.5 Analyysin peruslause

5.5.2 Analyysin peruslause, todistus

Todistus. 1) Derivaatan määritelmän avulla:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_x^{a} f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt\right)\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} f(c)(x+h-x)\\
&= \lim_{h\to 0^+} f(c),
\end{aligned}$$

jollakin $c \in [x, x+h]$. Kohdassa $(*)$ käytettiin integraalilaskennan väliarvolausetta. Siis

$$x \le c \le x+h.$$

Kun $h \to 0^+$, niin kuristusperiaatteen nojalla $c \to x$. Siis

$$\lim_{h\to 0^+} f(c) = \lim_{c\to x^+} f(c) = f(x),$$

koska f on jatkuva pisteessä x. Vastaavasti

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Siis

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

on olemassa, eli F on derivoituva, ja $F'(x) = f(x)$.

2) Jos $G'(x) = f(x)$, niin $F(x) = G(x) + C$. Siis

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C.$$

Kun $x = a$, niin

$$G(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0,$$

joten $C = -G(a)$. Valitaan $x = b$, jolloin

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a).$$

$\square$.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivut 305–306.