

6. INTEGROINTITEKNIIKOITA

6.2 RATIONAALIFUNKTION INTEGROIMINEN

6.2.2 jakoyhtälö, arkustangentti

Esimerkki. Laske

$$\int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} dx.$$

Ratkaisu. R1-jaetaan) Integrandi on muotoa P/Q , jossa ei päde $\deg(P) < \deg(Q)$. Johdetaan **jakoyhtälö**

$$x^3 + 3x^2 = x^2(x + 3) = \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{jakaja}}(x + 3) - (x + 3),$$

jolloin osataan jakaa

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = x + 3 - \frac{x + 3}{x^2 + 1}.$$

R2-hajotetaan) Halutaan termejä $g'(x)/g(x)$. Muokataan lauseke muotoon

$$x + 3 - \frac{x + 3}{x^2 + 1} = x + 3 - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 \frac{1}{1 + x^2},$$

jolloin kaikki termit osataan integroida. Nyt tulikin yhdeksi termiksi

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

R3-integroidaan) Integroidaan

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} dx &= \int x + 3 dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| - 3 \arctan(x) + C. \end{aligned}$$

VIITTEET

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivun 291.