6. Integrointitekniikoita

6.2 Rationaalifunktion integroiminen

6.2.3 jakokulma, osamurto

Esimerkki. Laske

$$\int \frac{7x^2+4x+1}{x^2-2x}dx.$$

Ratkaisu. R1-jaetaan) Integrandi on muotoa P/Q, jossa ei päde $\deg(P) < \deg(Q)$. Tulee siis tehdä jonkinlainen jakolasku. Lasketaan vaihtelun vuoksi **jakokulmassa**

$$\begin{array}{rr|rrr} & & 7 & & \\ \hline x^2 & -2x & 7x^2 & +4x & +1 \\ & & \mp 7x^2 & \pm 14x & \\ \hline & & & 18x & +1 \end{array}$$

Siis

$$\frac{7x^2+4x+1}{x^2-2x} = 7 + \frac{18x+1}{x^2-2x}.$$

R2-hajotetaan) Halutaan termejä $g'(x)/g(x)$. Muokataan lauseke muotoon

$$7 + \frac{18x+1}{x^2-2x} = 7 + 9\frac{2x-2}{x^2-2x} + 19\frac{1}{x^2-2x},$$

jolloin kaikki muut termit osataan integroida, paitsi viimeinen. Tehdään nyt osamurto

$$\frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}}_{\text{osataan integroida}}.$$

Vakiot A ja B tulee siis vielä selvittää. Oikean puolen kehitelmä keksittiin periaatteella: *"Termi $1/x(x-2)$ menee äärettömäksi, kun $x=0$ tai $x=2$, joten täytyy ottaa oikealle puolelle vastaavanlaiset äärettömäksi menevät termit"*. Kerrotaan puolittain termillä $x(x-2)$, jolloin saadaan

$$1 = A(x-2) + Bx.$$

Nyt

$$\text{Sijoitetaan } x=0 \text{ saadaan } A=-\frac{1}{2}.$$
$$\text{Sijoitetaan } x=2 \text{ saadaan } B=\frac{1}{2}.$$

R3-integroidaan) Integroidaan

$$\begin{aligned}\int \frac{7x^2+4x+1}{x^2-2x}dx &= \int 7dx + 9\int \frac{2x-2}{x^2-2x}dx - \frac{19}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{19}{2}\int \frac{1}{x-2}dx \\ &= 7x + 9\ln|x^2-2x| - \frac{19}{2}\ln|x| + \frac{19}{2}\ln|x-2| + C.\end{aligned}$$

Kommentti. Huomataan, että

$$9\ln|x^2-2x| = 9\ln|x(x-2)| = 9\ln|x| + 9\ln|x-2|,$$

ja vastaus siis sievenee vielä muotoon

$$7x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{37}{2}\ln|x-2| + C$$

Ratkaisussa siis tehtiin turhaan hajotus

$$\frac{18x+1}{x^2-2x} = 9\frac{2x-2}{x^2-2x} + 19\frac{1}{x^2-2x}.$$

(Olisi kannattanut jo huomata $\deg(18x+1) < \deg(x^2-2x)$ ja lopettaa hajottaminen.)

Olisi kannattanut tehdä suoraan

$$\frac{18x+1}{x^2-2x} = \frac{18x+1}{x(x-2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2},$$

jolloin

$$18x+1 = \alpha(x-2) + \beta x.$$

Nyt

$$\text{Sijoitetaan } x=0 \text{ saadaan } \alpha=-\frac{1}{2}.$$
$$\text{Sijoitetaan } x=2 \text{ saadaan } \beta=\frac{37}{2}.$$

Siis

$$\frac{7x^2+4x+1}{x^2-2x} = 7 + \frac{18x+1}{x^2-2x} = 7 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{37}{2}\frac{1}{x-2}$$

ja integrointi osataan tehdä suoraan

$$\int \frac{7x^2+4x+1}{x^2-2x}dx = 7x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{37}{2}\ln|x-2| + C.$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.