6. Integrointitekniikoita

6.2 Rationaalifunktion integroiminen

6.2.4 osamurto, useampikertainen

Esimerkki. Laske
$$\int \frac{1}{x^3 - 3x^2} dx.$$

Ratkaisu. R1-jaetaan) Integrandi on muotoa $P(x)/Q(x)$, jossa $\deg(P) < \deg(Q)$. Ei siis tarvitse jakaa enempää.

R2-hajotetaan) Tehdään nyt osamurto
$$\frac{1}{x^3 - 3x^2} = \frac{1}{x^2(x-3)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}}_{\text{yrite}}.$$

Koska vasemmalla puolella "$x = 0$ on kaksinkertainen napa ja $x = 3$ on yksinkertainen napa", yritteeseen otettiin termit A/x, B/x^2 ja $C/(x-3)$. (Vastaavaan tapaan differentiaaliyhtälölle
$$y'' + 2y' - 3y = \sin(x) + x^2$$
löydetään yksittäinen ratkaisu yritteellä
$$y(x) = D\cos(x) + E\sin(x) + Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Ix + J,$$
eli mukaan on otettava "kaikki mahdollisesti tarpeellinen".) Ratkaistaan vakiot A, B ja C. Kertomalla tekijällä $x^2(x-3)$ saadaan
$$1 = Ax(x-3) + B(x-3) + Cx^2$$
$$\text{Sijoitetaan } x = 0 \text{ saadaan } B = -\frac{1}{3}.$$
$$\text{Sijoitetaan } x = 3 \text{ saadaan } \beta = \frac{1}{9}.$$
Kerrotaan termillä $1/x^2$, saadaan
$$\frac{1}{x^2} = A\frac{x(x-3)}{x^2} + B\frac{x-3}{x^2} + C.$$

Annetaan $x \to \infty$, jolloin saadaan raja-arvoina

$$0 = A + 0 + C \quad \text{joten} \quad A = -C = -\frac{1}{9}.$$

R3-integroidaan) Saadaan siis

$$\int \frac{1}{x^3 - 3x^2} dx = -\frac{1}{9} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{9} \int \frac{1}{x-2} dx$$
$$= -\frac{1}{9} \ln|x| + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9} \ln|x-2| + C.$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.