6. Integrointitekniikoita

6.2 Rationaalifunktion integroiminen

6.2.5 Extra, neliöksi täydentäminen

Esimerkki. Laske

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx.$$

Ratkaisu. R1-jaetaan) Integrandi on muotoa $P(x)/Q(x)$, jossa $\deg(P) < \deg(Q)$. Ei siis tarvitse jakaa enempää.

R2-hajotetaan) Tulee etsiä nimittäjän x^3+1 nollakohdat. Huomataan, että $x=-1$ on eräs juuri:

$$(-1)^3+1 = -1+1 = 0.$$

Siis $x^3+1 = (x+1)p(x)$ jollekin polynomille p. Lasketaan jakokulmassa

		x^2	-x	+1	
x^2 +1|	x^3		+1		
	- x^3	- x^2			
		-x^2	1		
		+ x^2	+ x		
			x	1	
			- x	- 1	
				0	

Siis $p(x) = x^2 - x + 1$ eli $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Nyt

$$p(x) = x^2 - x + 1 = 0$$

tuottaa

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Siis termillä $x^2 - x + 1$ ei ole reaalisia juuria. Tehdään osamurto

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

ja kerrotaan termillä $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \\ &= \dots \\ &= x^2(A + B) + x(B + C - A) + 1 \cdot (A + C). \end{aligned}$$

Jotta vasemman ja oikeanpuoleiset polynomit voivat olla samat kaikilla muuttujan x arvoilla, termien x^n kertoimien täytyy olla samat. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{lrr} A + B & = 0 & (x^2 \text{ kerroin}) \\ -A + B & +C = 0 & (x^1 \text{ kerroin}) \\ A & +C = 1 & (x^0 \text{ kerroin}). \end{array}$$

Saadaan $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$. Siis

$$\frac{3}{x^3+1} = \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{osataan integroida}} - \frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

R3-integroidaan) Tulisi osata integroida

$$\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Täydennetään nimittäjään neliö

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Merkitään $u = x - 1/2$, jolloin $dx = du$, $x = u + 1/2$ ja $x - 2 = u - 3/2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{u-3/2}{u^2+3/4}du \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2u}{u^2+3/4}du - \frac{1}{3}\frac{4/3}{1+(2u/\sqrt{3})^2}du \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|u^2+3/4| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(2u/\sqrt{3}) + C \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan((2x-1)/\sqrt{3}) + C. \end{aligned}$$

Kommentti. Tehtävä oli sangen työläs. Tällaista ei tarvitse itse osata tällä kurssilla (eikä yleensä kyllä muuallakaan). Erityisen pahoja vaiheita olivat kertoimien A, B ja C laskeminen sekä integraali

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx.$$

Polynomilla $x^2 - x + 1$ on juurina

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},$$

joten voidaan tehdä hajotelma

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x+1},$$

missä

$$C = \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)}, \quad A = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha+1)}, \quad B = \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta+1)}.$$

Saadaan

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C\ln|x+1|.$$

Mutta tämän sieventämisessä tuntuu olevan iso työ.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.