6. Integrointitekniikoita

6.5 Epäoleelliset integraalit

6.5.1 Tyyppi I: rajoittamaton väli

Määritelmä. (Tyyppi I. Välillä $[a, \infty)$ jatkuvan funktion f *epäoleellinen integraali* yli välin $[a, \infty)$ on

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} f(x)dx.$$

Vastaavasti, jos f on jatkuva välillä $(-\infty, b]$, niin

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_R^b f(x)dx.$$

Kummassakin tapauksessa, jos raja-arvo on äärellisenä olemassa, niin kyseessä oleva epäoleellinen integraali *suppenee*. Jos raja-arvoa ei ole olemassa, niin epäoleellinen integraali *hajaantuu*.

Esimerkki.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty} -\Big|_1^R \frac{1}{x} = \lim_{R\to\infty} (\underbrace{-1/R}_{\to 0} + 1) = 1.$$

Esimerkki.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{R\to\infty} \Big|_1^R 2\sqrt{x} = \lim_{R\to\infty} (\underbrace{2\sqrt{R}}_{\to\infty} - 2\sqrt{1}) = \infty.$$

Esimerkki.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx &= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= 2\lim_{R\to\infty} (\arctan R - \arctan 0) = \pi.\end{aligned}$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.