6. Integrointitekniikoita

6.5 Epäoleelliset integraalit

6.5.2 Tyyppi II: rajoittamaton funktio

Määritelmä. (Tyyppi II. Olkoon f jatkuva välillä $(a, b]$ ja mahdollisesti rajoittamaton kohdan a läheisyydessä. Funktion *epäoleellinen integraali* yli välin $(a, b]$ on

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Vastaavasti, jos f on jatkuva välillä $[a, b)$, niin

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Jos raja-arvo on äärellisenä olemassa, niin kyseessä oleva epäoleellinen integraali *suppenee*, muuten *hajaantuu*.

Esimerkki.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c \to 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}) = 2.$$

Esimerkki.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \infty.$$

Lause. (p-integraalit) Olkoon $0 < a < \infty$. Tällöin

$$\int_a^\infty x^{-p}dx = \frac{a^{1-p}}{p-1}, \quad p > 1,$$

ja $= \infty$ muulloin. Lisäksi

$$\int_0^a x^{-p}dx = \frac{a^{1-p}}{1-p}, \quad p < 1,$$

ja $= \infty$ muulloin.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.