6. Integrointitekniikoita

6.6 Puolisuunnikas- ja keskipistemenetelmä

6.6.2 Vasen ja oikea päätepistemenetelmä

Esimerkki. Laske likiarvo integraalille

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Ratkaisu. (a) Vasen päätepiste -menetelmällä

$$\int_0^1 x^2 dx \overset{L_4}{\approx} \frac{1}{4}\big(0^2 + (1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2\big) = \frac{1}{4}\frac{1+4+9}{16} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}.$$

Vastaavasti, oikea päätepiste -menetelmällä

$$\int_0^1 x^2 dx \overset{R_4}{\approx} \frac{1}{4}\big((1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2 + 1^2\big) = \frac{1}{4}\frac{1+4+9+16}{16} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}.$$

Integraalin tarkka arvo on

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Virhetarkastelu. Vasen päätepiste -menetelmällä absoluuttinen virhe

$$\frac{7}{32} - \frac{1}{3} = -0.11458$$

ja suhteellinen virhe on

$$\left(\frac{7}{32} - \frac{1}{3}\right)/(1/3) = 0.343 = 34\%.$$

Oikea päätepiste -menetelmällä absoluuttinen virhe

$$\frac{15}{32} - \frac{1}{3} = 0.1354$$

ja suhteellinen virhe on

$$\left(\frac{15}{32} - \frac{1}{3}\right)/(1/3) = 0.406 = 41\%.$$

Koska $f(x) = x^2$ on kasvava välillä $[0, 1]$, niin VPM antaa arvion alakanttiin ja OPM yläkanttiin.

Jos taas f olisi vähenevä, niin tilanne olisi toisinpäin.
Ahaa! Siis menetelmien keskiarvo
$$\frac{VPM + OPM}{2}$$
voisi olla hyvä arvio.

Näiden keskiarvo (puolisuunnikasmenetelmä) onkin yleensä parempi arvio.
Tehtävä. Laske integraalille
$$\int_0^\pi \sin(x)dx$$
likiarvo menetelmällä L_4 tai R_4. Laske absoluuttinen ja suhteellinen virhe.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.