6. Integrointitekniikoita

6.6 Puolisuunnikas- ja keskipistemenetelmä

6.6.3 Puolisuunnikasmenetelmä

Aiemmin laskettiin likiarvoa integraalille

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Vasen päätepiste -menetelmä ja oikea päätepiste -menetelmä tuottivat tulokset

$$\begin{aligned} VPM_4 &= \frac{7}{32} = \frac{1}{3} - 0,11458, \\ OPM_4 &= \frac{15}{32} = \frac{1}{3} + 0,1354. \end{aligned}$$

Koska $f(x) = x^2$ on kasvava välillä $[0, 1]$, niin VPM antaa arvion alakanttiin ja OPM yläkanttiin.

Jos taas f olisi vähenevä, niin tilanne olisi toisinpäin.

Ahaa! Siis menetelmien keskiarvo

$$T_n = \frac{VPM_n + OPM_n}{2}$$

voisi olla hyvä arvio. Ainakin parempi kuin pelkkä VPM tai OPM, aina kun funktio on monotoninen (kasvava/vähenevä).

Esimerkki. Laske puolisuunnikasmenetelmällä likiarvo integraalille

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Ratkaisu. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &\overset{T_4}{\approx} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}0^2 + (1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2 \frac{1}{2}(4/4)^2\right) \\ &= \frac{1 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2}{4 \cdot 2 \cdot 4^2} \\ &= \frac{0 + 2 + 8 + 18 + 16}{4 \cdot 2 \cdot 4^2} = \frac{44}{128} = \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Virhetarkastelu. Absoluuttinen virhe on

$$\frac{11}{32} - \frac{1}{3} = 0,01041$$

ja suhteellinen virhe on

$$\left(\frac{11}{32} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} = 0,031 = 3,1\%.$$

Puolisuunnikassääntö antoi siis hieman liian ison arvon. Piirtämällä kuva nähdään, että tämä on luonnollista. Sanallisesti sanottuna, koska x^2 on välillä $[0,1]$ kasvava ja konveksi (kuvaajan pisteitä yhdistelevän murtoviivan alla), niin puolisuunnikasmenetelmä antaa liian suuren arvon.

Tehtävä. Laske integraalille

$$\int_0^\pi \sin(x)dx$$

likiarvo puolisuunnikasmenetelmällä P_4. Laske absoluuttinen ja suhteellinen virhe.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.