6. Integrointitekniikoita

6.7 Simpsonin menetelmä

6.7.1 Simpsonin menetelmä, tilastollinen johto

Aiemmin laskettiin likiarvoa integraalille

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Puolisuunnikasmenetelmä ja keskipistemenetelmä tuottivat tulokset

$$T_4 = \frac{11}{32} = \frac{1}{3} + 0,01041,$$
$$M_4 = \frac{21}{64} = \frac{1}{3} - 0,00520.$$

Ahaa! Jos tehtäisiinkin temppu

$$\frac{1}{3}T_4 + \frac{2}{3}M_4 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}0,01041 - \frac{2}{3}0,00520\right) \approx \frac{1}{3},$$

niin saataisiin todella tarkka arvo. Mutta oliko tämä sattumaa?

Piirtämällä kuva nähdään, että tulos on järkevä: $T_4 > I > M_4$.

Sanallisesti sanottuna, koska $f(x) = x^2$ on konveksi ($f''(x) > 0$) välillä $[0, 1]$, niin "kuvaaja on murtoviivan alla" ja puolisuunnikasmenetelmä antaa arvion yläkanttiin. Lisäksi keskipistemenetelmän palkki jakaa kuvaajan kahteen osaan. Yläpuolelle jäävä pinta-ala on suurempi kuin alapuolelle jäävä, mistä johtuen keskipistemenetelmä antaa arvion alakanttiin.

Jos taas f olisi konkaavi (alaspäin kupera), niin tilanne olisi toisinpäin. Koska $f(x) = x^2$ on kasvava välillä $[0, 1]$, niin VPM antaa arvion alakanttiin ja OPM yläkanttiin.

Jos taas f olisi vähenevä, niin tilanne olisi toisinpäin ja pätisi $M_4 < I < T_4$.

Integraaleja käsin laskeneet matemaatikot ovatkin sitten ajatelleet, että ehkäpä keskiarvo

$$\frac{T_n + M_n}{2}$$

olisi hyvä arvio.

Mutta! Todellakin absoluuttisia virheitä katsomalla nähdään, että $|T_4 - I| = 0,01041 \approx 2 \cdot 0,00520 = |M_4 - I|$. Siis johdetaankin uusi menetelmä painotettuna keskiarvona

$$S_n = \frac{T_n + 2M_n}{3}.$$

Ainakin menetelmä on parempi kuin pelkkä T_n tai M_n siinä tapauksessa, että funktion derivaatta on kasvava/vähenevä (= funktio on konveksi tai konkaavi).

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.