6. Integrointitekniikoita

6.7 Simpsonin menetelmä

6.7.2 Simpsonin menetelmä, paraabelikonstruktio

Jaetaan väli $[a, b]$ tasavälisesti n:ään osaväliin, n parillinen. Kahdella peräkkäisellä osavälillä f:n kuvaajaa approksimoidaan paraabelilla.

Konstruktio. Olkoon $f(-1) = A$, $f(0) = B$ ja $f(1) = C$. Asetetaan paraabeli $p(x) = ax^2 + bx + c$ pisteiden $(-1, A)$, $(0, B)$, $(1, C)$ kautta. Saadaan

$$p(0) = c = B.$$

Lisäksi

$$p(-1) - p(0) = a - b = A - B$$

ja

$$p(1) - p(0) = a + b = C - B.$$

Saadaan

$$a = \frac{(a-b) + (a+b)}{2} = \frac{A+C}{2} - B.$$

Samoin

$$b = \frac{(a+b) - (a-b)}{2} = \frac{C-A}{2}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)dx &= \int_{-1}^{1} ax^2 + bx + cdx = a\int_{-1}^{1} x^2dx + b\int_{-1}^{1} xdx + c\int_{-1}^{1} dx \\
&= \frac{2}{3}a + c = \frac{2}{3}\left(\frac{A+C}{2} - B\right) + B \\
&= \frac{2}{3}\underbrace{\frac{A+C}{2}}_{\text{puolisuunnikas}} + \frac{1}{3}\underbrace{B}_{\text{keskipiste}}
\end{aligned}$$

Paraabeliapproksimaatiolla saadaan siis Simpsonin menetelmä!
Erityisesti, jos on annettuna paraabeli

$$p(x) = c(x-a)(b-x),$$

niin

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{2}{3}(b-a)p\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{4}{3}\frac{1}{2}(b-a)p\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Asian todisti ehkäpä ensimmäisenä Arkhimedes kirjansa “Paraabelin neliöinnistä” loppuhuipennuksena 300-luvulla e.a.a.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.