6. Integrointitekniikoita

6.7 Simpsonin menetelmä

6.7.3 Bhaskaran approksimaatio

Siniä voidaan approksimoida paraabelilla

$$\sin(x) \approx p(x) = \frac{4x(\pi - x)}{\pi^2}.$$

Tarkistamalla nähdään, että $p(0) = p(\pi) = 0$ ja että $p(\pi/2) = 1$. Funktion p avulla saadaan arvio

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2 \approx \int_0^\pi p(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{3}(0 + 4 + 0) = \frac{\pi}{3} \cdot 2 \approx 2,094.$$

Siis keskimäärin $p(x)$ saa hieman liian isoja arvoja.

Approksimaatiosta saadaan tarkempi ottamalla funktion p nimittäjään jotain positiivista, esimerkiksi

$$\sin(x) \approx b(x) = \frac{4x(\pi - x)}{\pi^2 + (x - \pi/2)^2}.$$

Funktion b avulla saadaan arvio

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2 \approx \int_0^\pi b(x) = \pi\left(\pi - 4 + \arctan\left(\frac{3116}{237}\right)\right) \approx 1,99955.$$

Siis keskimäärin $\sin(x) \approx b(x)$ melko tarkasti.

Funktiota

$$b(x) = \frac{4x(\pi - x)}{\pi^2 + (x - \pi/2)^2}$$

kutsutaan Bhaskaran approksimaatioksi.

Jos kulma on annettu asteina, lienee helpointa käyttää kaavaa

$$\sin\left(\frac{180}{\pi}x\right) = \frac{4x(180 - x)}{40500 - x(180 - x)} = \frac{16x(180 - x)}{5 \cdot 180^2 - 4x(180 - x)}.$$

Tasa-osille saadaan kaava

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{16(n - 1)}{5n^2 - 4n + 4} = \frac{16(n - 1)}{4 + n(5n - 4)}.$$

Tehtävä. Laske arvot

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad n = 2, 3, 4,$$

tarkkoina arvoina ja Bhaskaran approksimaatiolla.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.