6. Integrointitekniikoita

6.8 Muita likimääräisiä integrointitapoja

6.8.1 Taylorin kaava

Esimerkki. Laske likiarvo integraalille

$$\int_0^1 e^x = e^1 - 1 \approx 1,71828$$

Taylorin sarjan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

avulla. **Ratkaisu.** Saadaan

$$\int_0^1 e^x \approx \Big[x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24\Big]_{x=0}^{x=1} = 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 \approx 1,7083.$$

Esimerkki. Laske likiarvo integraalille

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$$

käyttämällä Bhaskaran approksimaatiota

$$\sin(x) = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Numeerisessa laskennassa usein yhdistetään eri menetelmiä. Sinin arvoja voidaan laskea Bhaskara I:n approksimaatiolla

$$\sin\left(\frac{180}{\pi}x\right) = \frac{4x(180 - x)}{40500 - x(180 - x)} = \frac{16x(180 - x)}{5 \cdot 180^2 - 4x(180 - x)}.$$

Tämä voidaan sieventää muotoon

$$\sin(x) = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}.$$

Saadaan

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{16(n-1)}{5n^2 - 4n + 4} = \frac{16(n-1)}{4 + n(5n - 4)}.$$

Tehtävä. Laske arvot

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad n = 2, 3, 4,$$

tarkkoina arvoina ja Bhaskaran approksimaatiolla.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.