6. Integrointitekniikoita

6.8 Muita likimääräisiä integrointitapoja

6.8.4 Monte Carlo -simulaatio

Monte Carlo -menetelmä hyödyntää todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä. Menetelmässä

M1) Määritellään lähtödatan rajat, mille välille arvausten tulee sijoittua.

M2) Generoidaan lähtödata ja suoritetaan tarvittavat laskelmat.

M3) Tehdään päätelmiä suoritettujen laskelmien avulla.

Esimerkki. Lasketaan toruksen

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2 \leq r^2$$

tilavuus, kun $R=5$ ja $r=1$.

M1) Yksinkertaistetaan tilannetta. Riittää laskea tilavuus positiivisessa oktetissa, jossa $x, y, z \geq 0$ ja kertoa vastaus sitten luvulla 8. Tällaiset toruksen pisteet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sisältyvät laatikkoon

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 \leq x, y \leq R+r=l, \quad 0 \leq z \leq r\},$$

jonka tilavuus on $V_B = (R+r)(R+r)r = L^2 r$, missä $L = R+r$. Arvotaan siis pisteitä (x,y,z) laatikosta B.

M2) Kirjoitetaan koodi Octavea varten. Käytetään nyt lähtöarvoja $R=5$ ja $r=1$. Katso seuraava sivu.

```
R=5;r=1;L=R+r;  %lähtöarvot

s=0;            %apumuuttuja
K=10^4;         %arvausten lukumäärä
for k=1:K       %aloitetaan silmukka ja
x=L*rand(1);    %arvotaan piste (x,y,z)
y=L*rand(1);
z=r*rand(1);
if abs(sqrt(x^2+y^2)-R)^2 +z^2<= r^2,
s=s+1;          %lasketaan toruksen sisällä olevat pisteet
else
end
end

osuus=s/K;          %lasketaan osuus
Vt=8*osuus*L^2*r    %lasketaan tilavuus
```

Koodin voi copypastettaa esimerkiksi Octave Onlineen, `https://octave-online.net/`. Tulos on satunnainen, joten joka kerta saadaan eri tulos. Tietokoneajossa 24.9.2019 klo 8:32 saatiin

$$V_T = 96,624.$$

(Taulukkokirjan mukaan $V_T = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 Rr^2 = 10\pi^2 \approx 98,696.$)

M3) Pohditaan tuloksen merkitystä. Todennäköisyyslaskennan perusteella toruksen sisälle sattuneiden pisteiden lukumäärän s ja arvottujen pisteiden K lukumäärä ovat tilavuuksien suhteessa

$$\frac{V_T/8}{V_B} = \frac{s}{K}.$$

Siis

$$V_T = 8\frac{s}{K}V_B = 8 \cdot \text{osuus} \cdot L^2 r.$$

Tilastotieteen perusteella voitaisiin laskea luottamusväli. Tekemällä tarvittava määrä $K(95\%)$ arvauksia, tilastotieteen avulla voitaisiin päätellä, että

$$94 \leq V_T \leq 99, \quad 95\% \text{ todennäköisyydellä.}$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.