7. Integroinnin sovelluksia

7.1 Siivuttaminen ja pyörähdyskappaleet

7.1.1 Tilavuus siivuttamalla

Olkoon S xyz-koordinaatistossa oleva kappale x-akselia vastaan kohtisuorien tasojen välissä.

$A(x)$ on poikkileikkauksen

$$S \cap \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \alpha = x\}$$

pinta-ala kohdassa $x \in [a, b]$. Oletetaan, että pinta-ala A on jatkuva funktio välillä $[a, b]$. Olkoon $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Jaetaan kappale S n:ään "siivuun" jaon P_n mukaan. Välillä $[x_{j-1}, x_j]$ olevan siivun tilavuus ΔV_j on likimäärin $A(x_j)\Delta x_j$. Kappaleen S tilavuus on

$$V = \sum_{j=1}^{n} \Delta V_j \approx \sum_{j=1}^{n} A(x_j)\Delta x_j.$$

Annetaan $n \to \infty$ siten, että $\max \Delta x_j \to 0$, jolloin

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} A(x_j)\Delta x_j}_{\text{Riemannin summa}} \longrightarrow \int_a^b A(x)dx.$$

Siis saadaan

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Esimerkki. Tarkastellaan kartiota, jonka korkeus on h ja pohjan ala A. Olkoon $A(x)$ poikkileikkauksen ala kohdassa x. Yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow A(x) = \frac{A}{h^2}x^2.$$

Siis kartion tilavuus on

$$V = \int_0^h A(x)dx = \frac{A}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{A}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - 0\right).$$

Siis

$$V = \frac{Ah}{3}.$$

Tehtävä. Kuinka voit jakaa kuution kolmeksi tilavuudeltaan yhtä suureksi kartioksi? Piirrä kuva.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.