# 7. Integroinnin sovelluksia

## 7.1 Siivuttaminen ja pyörähdyskappaleet

### 7.1.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus

Olkoon $R$ käyrän $y = f(x)$ ja $x$-akselin väliin jäävä alue välillä $[a, b]$. Alue $R$ pyörähtää $x$-akselin ympäri, jolloin muodostuu kolmiulotteinen kappale.

Kohdassa $x \in [a, b]$ poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A(x) = \pi |f(x)|^2 = \pi f(x)^2.$$

Pyörähdyskappaleen tilavuus on siis siivutusmenetelmän perusteella

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

**Esimerkki.** Lasketaan $r$-säteisen pallon tilavuus. Pallo muodostuu, kun käyrän $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (määritelty välillä $[-r, r]$) ja $x$-akselin rajaama alue pyörähtää $x$-akselin ympäri. Saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[ rx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{r} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

## Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.