

## 7. INTEGROINNIN SOVELLUKSIA

### 7.1 TILAVUUS SIIVUTTAMALLA JA PYÖRÄHDYSKAPPALEET

#### 7.1.5 Toruksen tilavuus

**Esimerkki.** Lasketaan ympyrätoruksen tilavuus. (Vertaa kirjan sivuun 397.)

Torus muodostuu, kun ympyrä  $x^2 + (y - b)^2 = a^2$  pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Ympyrän yläosa on

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ympyrän alaosa on

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ylemmän puoliympyrän pyörähdyskappaleen tilavuus

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-a}^a (b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2) dx. \end{aligned}$$

Alemman puoliympyrän pyörähdyskappaleen tilavuus

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-a}^a (b^2 - 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2) dx. \end{aligned}$$

Toruksen tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \cdot 4b \underbrace{\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx}_{a\text{-säteisen puoliympyrän ala}} = 4\pi b \cdot \frac{\pi a^2}{2} \\ &= 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

#### VIITTEET

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivun 291.