7. Integroinnin sovelluksia

7.3 Käyrän pituus ja pinnan ala

7.3.1 Funktion kuvaajakäyrän pituus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty funktio, jolle f' on jatkuva. Olkoon $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Merkitään $P_i = (x_i, f(x_i))$.

Pisteiden P_{i-1} ja P_i välisen janan pituus on

$$|P_{i-1} - P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, jolloin

$$|P_{i-1} - P_i| = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}_{\approx f'(x_i)^2}} \cdot \Delta x_i.$$

Kuvaajan pituudelle S saadaan approksimaatio murtoviivan pituuden avulla

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1} - P_i| \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\Delta x_i.$$

Kun $n \to \infty$ siten että $\max \Delta x_i \to 0$, saadaan

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Merkitsemällä $y = f(x)$ saadaan

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Yleensä käyrän pituutta ei voi laskea analyyttisesti. Joissakin satunnaisissa tilanteissa myös analyyttinen ratkaisu löytyy. (“Ei täällä ruveta noita yli kolmannen asteen polynomeja, joissa on valmiiksi nauretut kertoimet, ratkomaan.” `http://www.students.tut.fi/ funktio/armo.html`)

Esimerkki. Laske käyrän
$$y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$$
pituus välillä $[1, 2]$.

Ratkaisu. Nyt
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{1}{16x^3},$$
joten
$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(4x^3 - \frac{1}{16x^3}\right)^2 \\ &1 + (4x^3)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2 \\ &= (4x^3)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{16x^3}\right)^2 \\ &= \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2 \end{aligned}$$
Siis
$$S = \int_1^2 4x^3 + \frac{1}{16x^3} dx = \left[x^4 - \frac{1}{32x^2}\right]_{x=1}^2 = \frac{1923}{128} \approx 15.0234.$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.