

7. INTEGROINNIN SOVELLUKSIA

7.3 KÄYRÄN PITUUS JA PINNAN ALA

7.3.2 Kartion pinnan ala

Tarkastellaan ympyräkartiota, jonka pohjan säde on r ja vaipan leveys pohjalta kärkeen on s . Leikkaamalla kartio auki nähdään, että vaippa on ympyräsektori. Olkoon keskuskulma θ . Vaipan ala

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi s^2 = \frac{s^2}{2} \cdot \theta = \frac{s^2}{2} \frac{2\pi r}{s} = \pi r s.$$

Jos kartio leikataan ohuiksi kolmiomaisiksi suikaleiksi aloittaen kartion kärjestä, väite on ilmeinen.

Tarkastellaan katkaistua kartiota, jossa pohjan säde on r_2 ja huipun säde on r_1 , sekä vaipan korkeus on s . Alaksi saadaan

$$\pi r_2(s_1 + s) - \pi r_1 s_1 = \pi((r_2 - r_1)s_1 + r_2 s).$$

Yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{s_1}{s_1 + s_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

joten

$$(r_2 - r_1) = r_1 s.$$

Katkaistun kartion vaipan alaksi saadaan

$$A = \pi(r_1 s + r_2 s) = 2\pi r s,$$

missä

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Jos $r_1 = r$ ja $r_2 = 0$, saadaan kartion vaipan ala. Jos $r_1 = r_2 = r$, saadaan lieriön vaipan ala.

Tehtävä. Leikkaa kuutio kolmeksi kartioksi. Mikä on kartioiden vaippojen alojen kokonaissumma (pohjat mukaan lukien)?

VIITTEET

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.