# 7. Integroinnin sovelluksia

## 7.3 Käyrän pituus ja pinnan ala

### 7.3.3 Pyörähdyskappaleen pinnan ala

Pyöräytetään kuvaajaa $y = f(x)$ $x$-akselin ympäri välillä $[a, b]$. Välin jako $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Välillä $[x_{i-1}, x_i]$ vaipan ala on likimäärin katkaistun kartion vaipan ala

$$2\pi r_i s_i,$$

missä $r_i \approx |f(x_i)|$ ja $s_i \approx \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Siis koko pyörähdyskappaleen pinnan ala on

$$A \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|\sqrt{1 + f'(x_i)^2}\Delta x_i.$$

Kun $n \to \infty$ siten, että $\max \Delta x_i \to 0$, saadaan

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

**Esimerkki.** Lasketaan $r$-säteisen pallon pinta-ala. Pallo muodostuu, kun käyrä $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pyörähtää $x$-akselin ympäri välillä $[-r, r]$. Merkitään

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{jolloin} \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^{r} |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx \\ &= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx \\ &= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2+x^2}dx \\ &= 4\pi \int_0^r r dx \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

**Esimerkki.** Aiemmin johdettiin $s$-säteisen pallon pinta-alalle kaava

$$4\pi s^2.$$

Jaetaan $r$-säteinen pallo pallokuoriin. Tällöin $r_i$-säteisen $\Delta r_i$-paksuisen pallokuoren tilavuus on

$$V_i \approx 4\pi r_i^2 \Delta r_i.$$

Siis

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx 4\pi \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta r_i.$$

Kun $n \to \infty$ siten, että $\max \Delta r_i \to 0$, niin saadaan

$$V = 4\pi \int_0^r s^2 ds = 4\pi \left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=0}^{r}.$$

## Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.