7. Integroinnin sovelluksia

7.4 Massakeskipiste

7.4.1 Massakeskipisteen laskukaavat

Tarkastellaan käyrän

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

ja x-akselin väliin jäävää aluetta. Alueen massakeskipiste voidaan laskea kaavoilla

$$\bar{x} = \frac{M_x}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{A},$$

missä

$$A = \int_a^b f(x)dx, \quad M_x = \int_a^b xf(x)dx, \quad M_y = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx$$

Esimerkki. Tarkastellaan puoliympyrää

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Nyt

$$A = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Symmetrian perusteella $M_x = 0$. Tämä näkyy myös integraalista, jonka integrandi on pariton funktio

$$M_x = \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}dx = -\int_0^{-r} x\sqrt{r^2 - x^2}dx + \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx = 0.$$

Saadaan

$$M_y = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \int_0^r (r^2 - x^2)dx = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3}r^3.$$

Siis

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2}{\pi r^2}\frac{2}{3}r^3 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.42r.$$

Kuvan perusteella tulos on järkevä.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.