

## 7. INTEGROINNIN SOVELLUKSIA

### 7.4 MASSAKESKIPISTE

#### 7.4.3 Pappuksen lause

Olkoon  $R$  tasoalue ja suora  $L$  samassa tasossa niin, että  $R$  ja  $L$  eivät leikkaa. Kun alue  $R$  pyörähtää suoran  $L$  suhteen, syntyy pyörähdyskappale (tai osa sellaisesta). Tällöin

(a) Pyörähdyskappaleen tilavuudelle saadaan

$$V = 2\pi\bar{r}A.$$

(b) Pyörähdyskappaleen pinta-alalle saadaan

$$S = 2\pi\bar{r}s.$$

Kaavoissa  $\bar{r}$  on massakeskipisteen etäisyys suorasta  $L$ ;  $A$  on alueen  $R$  pinta-ala ja  $s$  on alueen  $R$  reunan pituus.

**Esimerkki.** Puoliympyrä, jota rajaa  $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  pyörähtää  $x$ -akselin ympäri täyden kierroksen, jolloin syntyy pallo. Aiemmin laskeettiin, että painopiste on  $(0, 4r/3\pi)$ .

(a) Tilavuudelle saadaan

$$V = 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2}$$

(b) Pallon pinta-alalle saadaan

$$S = 2\pi\bar{r} \cdot \pi r = 2\pi^2 r\bar{r} = 4\pi r^2.$$

Siis

$$\bar{r} = \frac{4\pi r^2}{2\pi^2 r} = \frac{2}{\pi} r \approx 0.637r.$$

Kuvan perusteella vastaus tuntuu järkevältä.

**Tehtävä.** Laske toruksen tilavuus ja pinta-ala Pappuksen lauseen avulla.

## VIITTEET

- [1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.