7. Integroinnin sovelluksia

7.9 1-kertaluvun differentiaaliyhtälöt

7.9.2 Separoituva differentiaaliyhtälö

1. kertaluvun *separoituva differentiaaliyhtälö* on muotoa (kirja s. 447)

$$y' = f(x)g(y).$$

Se ratkaistaan kirjoittamalla $y' = dy/dx$, jolloin

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \iff \frac{dy}{g(y)} \overset{\text{separointi}}{=} f(x)dx.$$

Tämä yhtälö voidaan integroida puolittain

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

Vastaus sievenee, mikäli $1/g(y)$ ja $f(x)$ osataan integroida analyyttisesti.

Esimerkki. Ratkaise

$$y' = \frac{x}{y}$$

Ratkaisu. Separoidaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

muotoon

$$ydy = xdx,$$

josta integroimalla puolittain saadaan

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

eli

$$y^2 - x^2 = C,$$

missä $C = 2C_1$

Esimerkki. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y' = x^2y^3, \quad y(1) = 3.$$

Ratkaisu. Huomataan, että $y = 0$ on DY:n $y' = x^2y^3$ ratkaisu, mutta se ei toteuta alkuarvoehtoa $y(1) = 3$. Kun $y \neq 0$, saadaan yhtälöstä

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^3$$

separoimalla

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int x^2 dx.$$

Siis

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C_1$$

eli

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 + C.$$

(Tämä on implisiittinen muoto.) Ehdosta $y(1) = 3$ saadaan

$$\frac{1}{3^2} = -\frac{2}{3}x^3 + C, \quad C = \frac{7}{9}.$$

Ratkaisu on

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{9}, \quad \frac{1}{y^2} = \frac{-6x^3 + 7}{9},$$

eli

$$y = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}} \quad \text{(eksplisiittinen muoto)}$$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.