7. Integroinnin sovelluksia

7.10 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä

7.10.1 Frobeniuksen sarjamenetelmä

Esimerkki. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Ratkaisu. Tehdään yrite

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Tällä kurssilla ei voida tarkastella sarjan suppenemista. Lasketaan

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \end{aligned}$$

Saadaan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

ja päätellään, että täytyy olla

$$a_k = (k+1)a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a_0 = 1.$$

(Tämä on sarjan kertoimia a_k koskeva differenssiyhtälö.) Siis

$$y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 = 1.$$

Sitten

$$a_1 = \frac{a_0}{1} = 1, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Siis

$$a_k = \frac{1}{k!}.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Kommentti. Frobeniuksen sarjamenetelmässä differentiaaliyhtälö muuttuu differenssiyhtälöksi, joka on joskus helpompi ratkaista kuin alkuperäinen differentiaaliyhtälö. Saatua sarjakehitelmää ei välttämättä osata kirjoittaa suljetussa muodossa alkeisfunktioiden avulla.

Frobeniuksen sarjamenetelmä on teoreettisesti tärkeä. Esimerkiksi kompleksianalyysissä voidaan osoittaa, että jos

$$f'' + Af = 0$$

ja kerroin A voidaan antaa muodossa

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad -r < x < r,$$

missä luvut a_k ovat kompleksilukuja, ja sarja suppenee, niin myös ratkaisu f voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad -r < x < r,$$

joillekin kompleksiluvuille b_k.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.