7. Integroinnin sovelluksia

7.10 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä

7.10.2 Picardin iteraatiomenetelmä

Esimerkki. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Ratkaisu. Siis yhtälö on muotoa

$$y' = f(x, y(x)), \quad y(0) = \alpha.$$

Analyysin peruslauseen mukaan

$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(t, y(y))dt.$$

Pätee $y(x) \approx 1$, kun $x \approx 0$, joten

$$y(x) \approx 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x.$$

Ahaa! $y(x) \approx 1 + x$, kun $x \approx 0$. Jos arvio tehdään uudestaan, arvio tarkentuu!

$$y_2(x) \approx 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Edelleen

$$y_3(x) \approx 1 + \int_0^x (1+t+)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Huomataan, että

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = e^x.$$

Siis alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = e^x$.

Kommentti. Picardin iteraatiomenetelmä on teoreettisesti tärkeä. Sen avulla voidaan todistaa ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys. Jos yhtälö on muotoa

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = \alpha,$$

missä

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K, \quad a < x < b,$$

jollakin $K \in (0, \infty)$, niin Picardin lauseen mukaan yhtälöllä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu välillä (a, b).

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.