7. Integroinnin sovelluksia

7.10 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä

7.10.3 Laplace-muunnos-menetelmä

Laplace-muunnos on eräs operaatio, joka tekee funktiosta $f(t)$ toisen funktion eli "‘muunnoksen”. Tätä funktiota voidaan merkitä esimerkiksi

$$\mathcal{L}(f)(s) = \widehat{f}(s).$$

Osoittautuu, että derivaatan muunnos voidaan lausua funktion muunnoksen avulla:

$$\widehat{f'}(s) = s\widehat{f}(s) - f(0).$$

Tästä johtuen, esimerkiksi

$$\widehat{f''}(s) = s\widehat{f'}(s) - f'(0) = s(\widehat{f}(s) - f(0)) - f'(0) = \widehat{f}(s) - f'(0) - sf(0).$$

Laplace-muunnos on lisäksi lineaarinen operaatio: Jos f ja g ovat funktioita ja a ja b ovat vakioita, niin

$$\widehat{af + bg} = a\widehat{f} + b\widehat{g}.$$

Esimerkki. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

Ratkaisu. Otetaan yhtälöstä Laplace-muunnos puolittain. Lineaarisuuden nojalla saadaan ottaa muunnos joka termistä erikseen ja saadaan

$$\widehat{y''} + 4\widehat{y} = \widehat{0} = 0.$$

Toisen derivaatan muunnoksen kaavaa käyttäen saadaan

$$(s^2\widehat{y}(s) - sy'(0) - y(0)) + 4y(s) = 0$$

eli

$$(s^2 + 4)\widehat{y}(s) - 2s - 2 = 0, \quad \widehat{y}(s) = \frac{2s+2}{s^2+4} = 2\frac{s}{s^2+4} + 2\frac{1}{s^2+4}.$$

Taulukon perusteella todetaan, että

$$\widehat{y}(s) = 2\frac{s}{s^2+4} + 2\frac{1}{s^2+4} = 2\widehat{\cos(2x)} + 2\widehat{\sin(2x)}.$$

Ottamalla käänteismuunnos puolittain saadaan

$$y(x) = 2\cos(2x) + 2\sin(2x).$$

Kommentti. Laplace-muunnoksen käyttämiseksi sovelluksissa riittää tietää, kuinka muunnos toimii. Lisäksi yleensä tehdään osamurtokehitelmiä ja katsotaan tarvittavat kaavat taulukosta. Tämän vuoksi Laplace-muunnosta käytetään yleensä insinööritieteissä.

Varsinainen muunnoksen teoreettinen tutkimus voi olla haastavaa. Muunnos määritellään kaavalla

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

(Käänteismuunnoksen laskeminen tapahtuu kompleksisena integraalina, mistä johtuen käänteismuunnos on parempi katsoa taulukosta.) Muunnoskaavojen todistaminen tapahtuu osittaisintegrointia käyttäen.

Tehtävä. Oletetaan, että

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad \text{kaikilla } s \in (0,\infty).$$

Laplace-muunnoksen ääritelmää käyttäen, todista kaava

$$\widehat{f} = s\widehat{f}(s) - f(0)$$

Kommentti. Integraalimuunnoksia on paljon erilaisia. Esimerkiksi Fourier-muunnosta

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

missä ω on “taajuus”, käytetään paljon muun muassa optiikassa. Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksen kaava on suhteellisen yksinkertainen.

Mellinin muunnos

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

on nimetty suomalaisen matemaatikon Robert Hjalmar Mellinin (1854–1933) mukaan.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.