7. Integroinnin sovelluksia

7.10 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä

7.10.4 Eulerin menetelmä

Jos y on derivoituva pisteessä x, niin

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = y'(x).$$

Siis pienillä askeleen h arvoilla saadaan

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx y'(x), \quad y(x+h) \approx y(x) + hy'(x).$$

Voidaan siis iteroida

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha \\ y(x+h) &= y(x) + hy'(x) \\ y(x+2h) &= y(x+h) + hy'(x+h) \\ &\dots \\ y((n+1)h) &= y(x+nh) + hy'(x+nh), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tätä kutsutaan Eulerin menetelmäksi.

Esimerkki. Ratkaise alkuarvo-ongelmassa

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

arvo $y(0.5)$ Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$.

Ratkaisu. Saadaan

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(0.1) &= 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1 \\ y(0.2) &= 1.1 + 0.1 \cdot 1.1 = 1.21 \\ y(0.3) &= 1.21 + 0.1 \cdot 1.21 = 1.331 \\ y(0.4) &= 1.331 + 0.1 \cdot 1.331 = 1.4641 \\ y(0.5) &= 1.4641 + 0.1 \cdot 1.21 = 1.61051. \end{aligned}$$

Tarkka ratkaisu on $y(x) = e^x$ ja $y(0.5) = e^{0.5} \approx 1.64872$.

Kuva tähän.

Kommentti. Eulerin menetelmä on suhteellisen yksinkertainen ja sille löytyy hyötykäyttöä. Luonnollisesti menetelmää voidaan hyödyntää myös useampiulotteisissa osittaisdifferentiaaliyhtälöissä.

Eulerin menetelmän inspiroimina on kehitetty muita numeerisia menetelmiä. Erityisesti derivaattaa ei kannata laskea vain yhdessä $y'(x + nh)$ vaan kannattaa etsiä parempia arvioita. Erityisesti Runge-Kutta-menetelmä RK4 on hyvin tunnettu. Numeerisia menetelmiä käsitellään enemmän numeerisen analyysin kursseilla.

Eulerin menetelmän Octave-koodi tähän.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.