7. Integroinnin sovelluksia

7.10 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä

7.10.5 Vakion variointi

Esimerkki. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$L(y) = x^2 y'' - 2y = 0,$$

kun tiedetään, että $y(x) = x^2$ on yksi ratkaisu.

Ratkaisu. Yhtälö voitaisiin separoida

$$\frac{y''}{y} = \frac{2}{x^2},$$

mutta tätä ei osata ratkaista suoraan.

Käytetään vihjettä. Yhtälö on lineaarinen ja sen vuoksi myös $y(x) = ux^2$ on ratkaisu kaikilla $u \in \mathbb{R}$. Tehdään yrite (varioidaan vakiota u) $y_2(x) = u(x)y(x)$. Saadaan

$$\begin{aligned} y_2(x) &= uy \\ y_2'(x) &= u'y + uy' \\ y_2''(x) &= u''y + 2u'y' + uy''. \end{aligned}$$

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} L(y_2) = x^2 y_2'' - 2y_2 &= x^2(u''y + 2u'y' + uy'') - 2uy \\ &= x^2(u''y + 2u'y') + u\,\underbrace{(x^2y'' - 2y)}_{=Ly=0} \\ &= x^2(u''y + 2u'y') = 0. \end{aligned}$$

Ahaa! Siis koska yhtälö on lineaarinen, niin termit, jossa on u, tulivat termiin $u(Ly)$, missä $Ly = 0$, ja siis hävisivät.

Jos $x \neq 0$, saadaan

$$u''y = -2u'y', \quad \frac{u''}{u'} = -2\frac{y'}{y}, \quad \ln(u) = -2\ln(y) + C_1.$$

Siis

$$u' = \frac{C_2}{y^2} = \frac{C_3}{x^4}, \quad u = \frac{C_4}{x^3}.$$

Siis

$$y_2 = u(x)y(x) = \frac{C_4}{x^3} \cdot x^2 = \frac{C_4}{x}.$$

Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = ax^2 + b\frac{1}{x}.$$

Kommentti. Prosessissa termi $u(Ly)$ hävisi ja syntyi uusi yhtälö

$$u''y + 2u'y' = 0, \quad \text{eli} \quad w'y + 2wy = 0, \quad \text{missä } u' = w,$$

joka on funktion $w = u'$ suhteen alempaa astetta. Tapahtui siis kertaluvun pudotus. Näin tapahtui, koska yhtälö oli lineaarinen.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.