7. Integroinnin sovelluksia

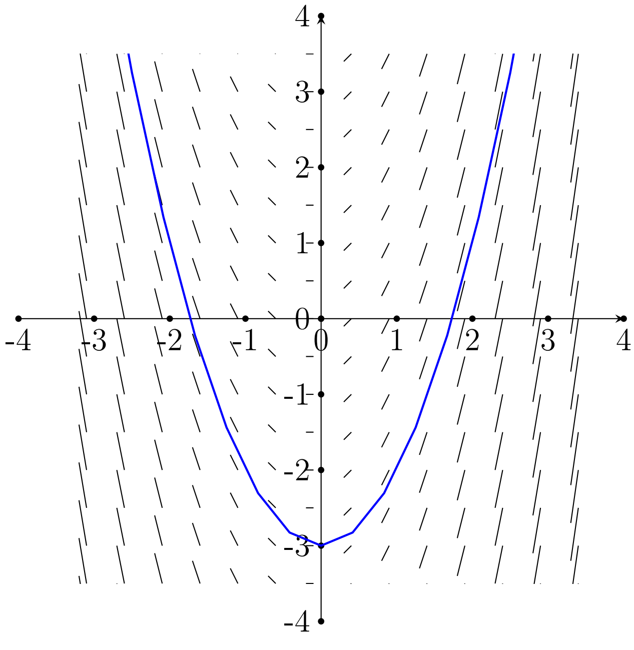
7.11 Differentiaaliyhtälöiden hahmotusta

7.11.1 Suuntakenttä, perusteet

Jos ratkaistavana on differentiaaliyhtälö

$$y' = f(x, y), \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

niin joka pisteen (x, y) kautta kulkee yksi ratkaisukäyrä, jonka kulmakerroin on $f(x, y)$. Ratkaisukäyriä voidaan hahmotella piirtämällä lyhyitä viivoja, joilla on tällainen kulmakerroin. Syntyvää kuvaa nimitetään suuntakentäksi.



Yhtälön $y' = 2x$ suuntakenttä ja pisteen $(-3, 0)$ kautta kulkeva ratkaisukäyrä

Esimerkki. Etsitään alkuarvotehtävän

$$y' = \cos(x), \quad y(0) = 1.6,$$

ratkaisu.

Ratkaisu. Ajatellaan, että $\pi \approx 3$ ja lasketaan

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(1) \approx 0.5, \quad \cos(1.5) \approx 0$$

ja

$$\cos(2) \approx -0.5, \quad \cos(3) = -1.$$

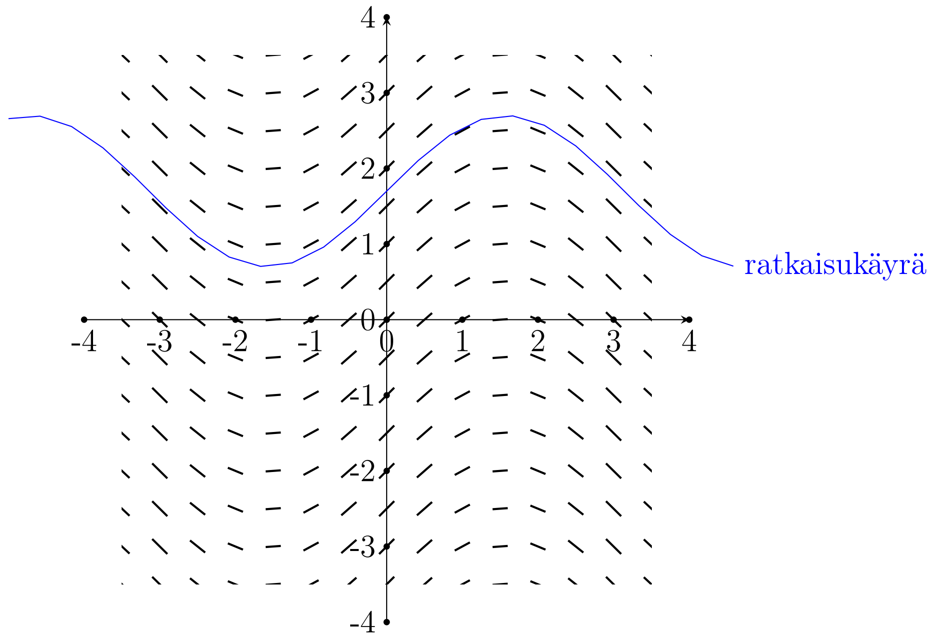
Keskiarvona vielä

$$\cos(0.5) \approx (\cos(0) + \cos(1))/2 \approx 0.75, \quad \cos(2.5) \approx -0.75.$$

Piirretään käsin tai tietokoneella x-akselille viivanpätkiä, joilla on tällaiset kulmakertoimet.

Samalle x:n arvolle piirretään eri korkeuksille samansuuntaisia viivoja.

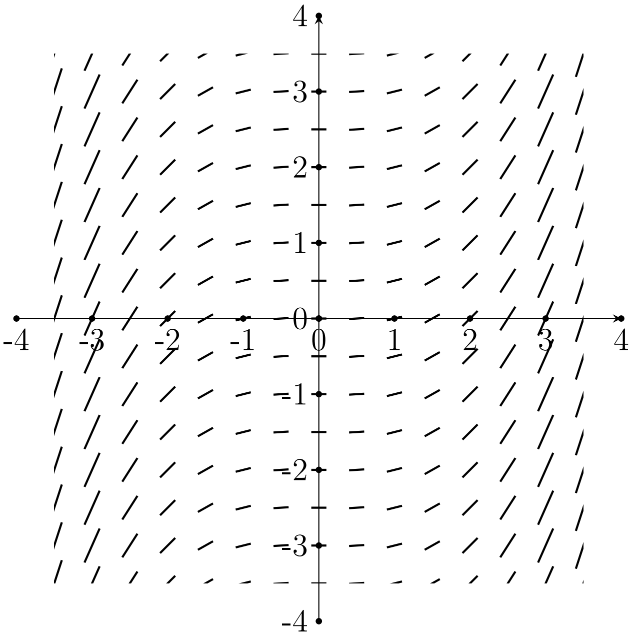
Hahmotellaan lähtien kohdasta $(0, 1.6)$ ratkaisua oikealle ja vasemmalle.



Esimerkki. Hahmottele alkuarvotehtävän

$$y' = x^2/4, \quad y(0) = 1.6,$$

ratkaisua, kun on annettu ohessaoleva suuntakenttä.



Difyhtälön $y' = f(x) = x^2/4$ suuntakenttä.

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, Ninth edition, Pearson, Ontario, 2018. Sivu 291.