Esimerkki. Halutaan tarkastella raja-arvoa

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Huomataan, että $p(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ ja $q(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$. Siis raja-arvo on "tyyppiä $0/0$". Siis välttämättä $p(x)$ ja $q(x)$ ovat jaollisia tekijällä $x - 1$. Tehdään jakaminen jakokulmassa:

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x - 1 & x^2 - 3x + 2 \\ & -x^2 + x \\ \hline & -2x + 2 \\ & 2x - 2 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x - 1 & x^2 + 2x - 3 \\ & -x^2 + x \\ \hline & 3x - 3 \\ & -3x + 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Siis $p(x) = (x - 1)(x - 2)$. Siis $q(x) = (x - 1)(x + 3)$.

Siis

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x - 2}{x + 3} \to \frac{-1}{4},$$

kun $x \to 1$. Siis tarkasteltava raja-arvo on olemassa ja on $-1/4$.

Esimerkki. Halutaan laskea integraali

$$\int \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3} dx.$$

Koska osoittaja on korkeampaa astetta, voidaan jakaa jakokulmassa:

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x^2 + 2x - 3 & x^3 \qquad + 4x + 2 \\ & -x^3 - 2x^2 + 3x \\ \hline & -2x^2 + 7x + 2 \\ & 2x^2 + 4x - 6 \\ \hline & 11x - 4 \end{array}$$

Siis osamäärä on $x - 2$ ja jakojäännös on $11x - 4$. Saadaan

$$\frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3} = x - 2 + \frac{11x - 4}{x^2 + 2x - 3}.$$

Rationaalifunktion

$$\frac{11x - 4}{x^2 + 2x - 3}$$

nimittäjän nollakohdiksi saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = 1$ ja $x = -3$. Siis voidaan tehdä osamurtokehitelmä

$$\frac{11x - 4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Kertomalla puolittain polynomilla $(x-1)(x+3)$ saadaan

$$11x - 4 = A(x+3) + B(x-1).$$

Tämän tulisi siis päteä kaikilla reaaliluvuilla x. Asetetaan $x = 1$, jolloin saadaan

$$7 = 4A, \quad A = \frac{7}{4}.$$

Toisaalta, asettamalla $x = -3$, saadaan

$$-37 = -4B, \quad B = \frac{37}{4}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+4x+2}{x^2+2x-3} &= x^2 - 2x + \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{37}{4}\int \frac{1}{x+3}dx \\ &= x^2 - 2x + \frac{7}{4}\ln|x-1| + \frac{37}{4}\ln|x+3| + C\end{aligned}$$