1. Raja-arvoja

Normaali

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)(bx+c)}{(x-a)(cx+d)}$$

Vaikeampi

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n(x-a)(bx+c)}{x^m(x-a)(cx+d)}$$

1.1. Suosikkeja.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \overset{l'H}{==} \lim_{x \to a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$

2. Raja-arvoja äärettömässä

Raja-arvo L

- $L = 0$
- $L = a \in \mathbb{R}$
- $L = -\infty$
- $L = +\infty$
- L ei olemassa

Ideoita

- rat. funktio
- rat. funktio + häiriö
- e^x, e^{-x}, $\ln(x)$
- Oskilloivat $\sin(x)$
- hyperboliset ja arkusfunktiot

2.1. Rat. funktio.

2.2. Rat. funktio + häiriö.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + e^x}{x^3 + 4} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + e^{-x}}{x^3 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + e^{2x}}{(x^3 + e^x)^2} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + e^{x^2}}{(x^3 + e^x)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + \ln(x)}{x^3 + 4} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + x\ln(x)}{x^2 + 2\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + x\ln(x)}{x + 2\ln(x)} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 4}{4x^2 + x^2\ln(x)} = 0$$

2.3. Oskilloivat funktiot.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + \sin(x)}{x^2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + x\sin(x)}{x + 1} \quad \text{ei olemassa}$$

$$\frac{\sin(1/x)}{\tan(1/x)} = \cos(1/x) \to \cos(0) = 1, \quad x \to \infty.$$

2.4. Eksponenttifunktio.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2+\log(x)}}{2x} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2+3\log(x)}}{2x} = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

2.5. Logaritmifunktio.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 + \log(1/x)}{\log(x)} = -1$$

2.6. Hyperboliset ja arkusfunktiot.

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} (x) = \frac{\pi}{2}$$

Riippuu, mikä päähaara on valittu. Yleensä kuitenkin

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

ja

$$\arccos(-1) = 0, \quad \arccos(1) = \pi.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sinh(x)}{3x + e^x} = \frac{1}{2}$$

2.7. Mieltä avaavia / sarjat ja integraalit. Joskus raja-arvo voidaan laskea sieventämisen jälkeen. Esimerkiksi

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

voidaan laskea, kun kirjoitetaan

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} = e^{\frac{\ln x}{1/x}}.$$

Saadaan

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1.$$

2.8. Huomiokykyä.

$$\lim_{t\to 2} x^t = x^2, \quad \lim_{x\to 2} x^t = 2^t$$

2.9. Integraalilaskentaan. Mittateorian kurssia voisi motivoida integraalilaskennassa sanomalla "näitä raja-arvoja ei osata laskea".

$$\lim_{p\to 1^+} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \infty$$

$$\lim_{p\to 1^+} \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^p} dx \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{p\to 1^+} \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^p} dx \quad \text{ei olemassa}$$

(oleellista on pinta-alojen kumoutuminen)

2.10. Eksoottisia.

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^x = x \to 0, \quad x \to 0^+.$$

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{\sin(x)} = x^{\frac{\sin(x)}{x}} \to 0^1 = 0, \quad x \to 0^+.$$

$$\left(x^{\sin(x)}\right)^{\cot(x)} = x^{\cos(x)} \to 0^1 = 0, \quad x \to 0^+.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^{x^2+x}\right)^{\frac{1}{x^2+1}} = 0^1 = 0.$$

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \to e^0 = 1, \quad x \to \infty$$

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \to e^{-\infty} = 0, \quad x \to 0^+$$