

Tutkimussuunnitelma

28. syyskuuta 2013

Tohtorikoulutettava: Juha-Matti Huusko
Väitöskirjan nimi/aihe: Analyttisten funktioiden nollakohtien geometrinen jakauma
(Geometric zero distribution of analytic functions)
Suorituspaikka: Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
Pääohjaaja: Jouni Rättyä
Jatko-opintojen kesto: arviolta 48 kk (10/2013 alkaen)

1. Tausta

Useat matematiikan ongelmat pelkistyvät lopulta tilanteeseen, jossa tulee ratkaista kompleksilukujen joukossa yhtälö $f(z) = 0$. Yleisessä tapauksessa tämä helpolta näyttävä ongelma on osoittautunut erittäin vaikeaksi käsitellä. Esimerkiksi, vuonna 1799 Gaussin todistaman algebran peruslauseen nojalla *kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä on asteensa verran juuria — monikerrat laskien*. Kuitenkin, jo mielivaltaisen viidennen asteen polynomiyhtälön tapauksessa juuria ei osata eksplisiittisesti kirjoittaa polynomin kertoimien avulla, kuten Abel osoitti vuonna 1824.

1.1. Bergmanin avaruuden nollakohdat

Riemannin kuvauslauseen nojalla jokainen yhdesti yhtenäinen kompleksitason aito osajoukko on konformisesti ekvivalentti kompleksitason yksikkökierokkeen $\mathbb{D}$ kanssa. Näin ollen on järkevää rajoittaa tutkimaan yksikkökierokkeen analyttisiä funktioita, joiden joukolle käytetään merkintää $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Joidenkin funktioavaruuksien tapauksessa siihen kuuluvien funktioiden nollakohtien karakterisaatio on tunnettu. Esimerkiksi Hardy-avaruuden

$$H^p = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

jokaisen funktion $f \in H^p$ nollakohdat $\{z_n\}$ toteuttavat Blaschke-ehdon

$$\sum_n (1 - |z_n|) < \infty. \tag{1.1}$$

Tämän lisäksi, jokainen ehdon (1.1) toteuttava pistejono $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ on erään Hardy-avaruuteen H^p kuuluvan funktion nollajono — erityisesti funktioksi voidaan valita pistejonoon $\{z_n\}$ liittyvä Blaschke-tulo.

Painotettu Bergmanin avaruus A_ω^p , missä $0 < p < \infty$, koostuu niistä funktioista $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, joille

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) dA(z) < \infty.$$

Tässä ω on positiivinen integroitava painofunktio. Yksinkertaisimmassa tilanteessa $\omega \equiv 1$, jolloin saadaan klassinen Bergmanin avaruus A^p . Edes tässä tapauksessa avaruuteen kuuluvien

funktioiden nollakohtia ei ole pystytty karakterisoimaan täydellisesti. Yleisesti tiedetään, että funktion $f \in A^p$ nollajono $\{z_n\}$ toteuttaa ehdon

$$\sum_n (1 - |z_n|) \left(\log \frac{1}{1 - |z_n|} \right)^{-1-\varepsilon} < \infty \quad (1.2)$$

kaikilla $\varepsilon > 0$ ([3, s. 98], [4]). Ehdon (1.2) yleistys, joka liittyy tapaukseen $A^p_{\mathbb{D}}$, löytyy lähteestä [16, Theorem 3.14]. Lisäksi on olemassa Bergmanin avaruuden funktioita, joiden nollajonot eivät toteuta Blaschke-ehdtoa. Näin ollen on perusteltua sanoa, että Bergmanin avaruuden funktiot toteuttavat melkein Blaschke-ehdon. Toisaalta, Bergmanin avaruuden funktioiden nollakohtia ei voida karakterisoida radiaalisella ehdolla, koska nollakohtien sijaitessa esimerkiksi positiivisella reaaliakselilla on nollakohtien toteutettava Blaschke-ehto ([3, Theorem 13, s.116], [19]). Bergmanin avaruuden nollakohtien täydellinen karakterisaatio on osoittautunut hankalaksi ja mielenkiintoiseksi ongelmaksi, ja se on saanut osakseen mittavaa kansainvälistä huomiota. Bergman-tyyppisiä avaruuksia ovat tutkineet esimerkiksi Horowitz [9, 10, 11, 12], Korenblum [14] ja Seip [17, 18].

Tohtorikoulutettava tutustui pro gradu -tutkielmassaan [13] Bergmanin avaruuden ominaisuuksiin. Tutkielmassa käsiteltiin tuloksia [16, Lemma 6.3, Theorem 3.5, Proposition 3.16 ja Lemma 3.17].

1.2. Kompleksiset differentiaaliyhtälöt

Kompleksialueen differentiaaliyhtälöt ovat muodostuneet viimeisten vuosikymmenien aikana laajan kansainvälisen tutkimusyhteistyön kohteeksi. Teorian nykytilanteen valossa lineaariset differentiaaliyhtälöt

$$f^{(k)} + a_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + a_1(z)f' + a_0(z)f = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

ovat jo verrattain hyvin tunnettuja objekteja, kun kertoimet $a_{k-1}(z), \dots, a_1(z), a_0(z)$ ovat analyyttisiä funktioita. Tiedetään, että kertoimien kasvu on yhteydessä ratkaisujen kasvuun, ja kääntäen [2, 5, 6, 7, 15, 20]. Toisaalta ratkaisufunktioiden nollakohtien lukumäärä voidaan myös liittää kertoimien kasvuun [8]. Viimeaikaisten tulosten nojalla kompleksisen differentiaaliyhtälön

$$f'' + a(z)f = 0 \quad (1.3)$$

ratkaisujen nollakohtien minimaalinen separaatio määräytyy analyyttisen kertoimen $a(z)$ maksimaalisen kasvun mukaan, ja kääntäen [1]. Näin ollen voidaan sanoa, että yhtälön (1.3) tapauksessa kertoimen kasvu, ratkaisujen kasvu, ratkaisujen nollakohtien lukumäärä ja ratkaisujen nollakohtien minimaalinen separaatio liittyvät läheisesti toisiinsa.

2. Tavoitteet

Jatko-opintojen tavoitteena on tutustuttaa tohtorikoulutettava Bergmanin avaruuteen liittyviin seikkoihin ja luoda hänelle vahva tietopohja tulevaa tutkijanuraa ajatellen. Tämä tarkoittaa monien yksikkökiekon analyyttisten funktioavaruuksien tutkimista ja niiden kytkemistä yksikkökiekon differentiaaliyhtälöihin. Tohtorikoulutettavan tarkoituksena on tutkia Bergmanin avaruuden nollakohtien karakterisaatio-ongelmaa käyttämällä hyväksi jo olemassaolevaa differentiaaliyhtälöiden teoriaa.

Yksikkökiekon differentiaaliyhtälöiden oskillaatioteoria antaa monipuoliset työkalut nollakohtien tutkimiseen. Näillä menetelmillä tohtorikoulutettava tutkii ratkaisufunktioiden nollakohtia tarkastelemalla niiden lukumäärää, separaatiota ja tiheyttä. Eräs konkreettinen ongelma

on esimerkiksi tutkia differentiaaliyhtälön (1.3) kertoimen nollakohtien vaikutusta ratkaisufunktioihin. Tätä ongelmaa ei ole käsitelty vielä kirjallisuudessa. Tutkimuksen edetessä sen pääpaino siirretään yleisten analyyttisten funktioiden nollakohtien tutkimiseen, jossa differentiaaliyhtälöt esiintyvät lähinnä apuvälineen roolissa. Nollakohtien tutkimuksessa tarkastellaan erityisesti nollakohtien geometrisen jakauman merkitystä niin differentiaaliyhtälöiden kuin Bergmanin avaruuden funktioiden tapauksessa.

3. Toteutus

3.1. Aikataulu

Tohtorikoulutettava valmistui filosofian maisteriksi 20. syyskuuta 2013. Jatko-opinnot on tarkoitus aloittaa lokakuussa 2013. Jatko-opinnot koostuvat kursseista ja tutkimussuunnitelman aihepiiriin kuuluvista tieteellisistä artikkeleista. Tohtorikoulutettava on jo suorittanut jatko-opintoihin kuuluvia kursseja. Jatko-opinnot, mukaanlukien väitöskirjatyö, on tarkoitus saada valmiiksi neljässä vuodessa.

3.2. Rahoitus

Aikavälillä 1.10. — 31.12.2013 rahoitus tulee lähteestä Strateginen rahoitus/Jouni Rättyä 930349. Tämän jälkeen, 1.1.2014 alkaen, jatko-opinnot ja niihin liittyvät matkat pyritään rahoittamaan suomalaisten säätiöiden apurahojen avulla. Tohtorikoulutettava hakee muun muassa Väisälän rahaston apurahaa syksyn 2013 haussa.

4. Tutkimusympäristö

Fysiikan ja matematiikan laitoksella klassinen kompleksianalyysi ja differentiaaliyhtälöiden teoria ovat eräitä laitoksen vahvuusaloja. Kompleksianalyysin tutkijaryhmä koostuu monista kansainvälistä huippututkimusta tekevistä tutkijoista, jotka takaavat tohtorikoulutettavalle tuotteliaan tutkimusympäristön.

Jatko-opintoihin pyritään sisällyttämään ulkomaille kohdistuva tutkimusvierailu, jonka kohdeyliopisto valitaan myöhemmin. Ulkomaanvierailulla taataan tohtorikoulutettavalle mahdollisimman monipuolinen näkemys kompleksianalyysin tutkimuksesta.

5. Odotetut tutkimustulokset

Tutkimusaihe on haastava ja on todennäköistä, että Bergmanin avaruuden funktioiden nollakohtia ei saada karakterisoitua. Tutkimuksen tuloksena kuitenkin voidaan odottaa uusia osatuloksia nollakohtien geometrisesta jakaumasta. Yhteenvetona, Bergmanin avaruuden tutkiminen antaa tohtorikoulutettavalle hyvän pohjan tulevaa tutkimusta varten.

Viitteet

- [1] M. Chuaqui, J. Gröhn, J. Heittokangas, J. Rättyä, *Zero separation results for second order linear differential equations* Adv. Math. 245 (2013), 382-422.
- [2] I. Chuzhykov, J. Heittokangas, J. Rättyä, *Sharp logarithmic derivative estimates with applications to ordinary differential equations in the unit disc*, J. Aust. Math. Soc. (2010), no. 2, 145-167.
- [3] P. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces*, Amer. Math. Soc., Boston, 2000.

- [4] P. Duren, A. Schuster, D. Vucotić, *On uniformly discrete sets in the disc*, Quadrature Domains and Their Applications 156, s.131-150, Birkhäuser, 2005.
<http://math.sfsu.edu/schuster/durschvuk.pdf>
- [5] J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä, *Growth estimates for solutions of linear complex differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. (2004), no. 1, 233-246.
- [6] J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä, *Linear differential equations with solutions in the Dirichlet type subspace of the Hardy space*, Nagoya Math. J. (2007), 91-113.
- [7] J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä, *Linear differential equations with coefficients in the weighted Bergman and Hardy spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. (2008), 1035-1055.
- [8] J. Heittokangas, J. Rättyä, *Zero distribution of solutions of complex linear differential equations determines growth of coefficients*, Math. Nachr. 284 (2011), 412-420.
- [9] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Thesis (Ph.D.), University of Michigan (1974), 84 s.
- [10] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. (1974), 693-710.
- [11] C. Horowitz, *Factorization theorems for functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. (1977), no. 1, 201-213.
- [12] C. Horowitz, *Some conditions on Bergman space zero sets*, J. Anal. Math. (1994), 323-348.
- [13] J.-M. Huusko, *Bergmanin avaruuden funktioiden nollakohdist*, pro gradu -tutkielma, Itä-Suomen yliopisto, 2013. <http://integraali.com/gradu/Huusko2013.pdf>
- [14] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory*, Acta Math. (1975), no. 3-4, 187-219.
- [15] I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, (1993).
- [16] J. Rättyä ja J. Peláez, *Weighted Bergman Spaces induced by rapidly increasing weights*, Mem. Amer. Math. Soc. 227 (2013) <http://arxiv.org/pdf/1210.3311.pdf>
- [17] K. Seip, *Beurling type density theorems in the unit disc*, Invent. Math. (1993), no. 1, 21-39.
- [18] K. Seip, *On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$* , J. Anal. Math. (1995), 307-322.
- [19] H. Shapiro, A. Shields, *On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces*, Math. Z., Boston, 1962.
- [20] H. Wittich, *Zur theorie linearer differentialgleichungen im komplexen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. (1966), 1-18.

Joensuussa 28. syyskuuta 2013,

Tohtorikoulutettava, Juha-Matti Huusko

Pääohjaaja, apulaisprofessori Jouni Rättyä