

Fourier-analyysin peruskurssi 2014

12. marraskuuta 2014

Ohessa on laskuharjoitusten ratkaisuja. Luvussa 1 on jokaisesta tehtävästä tehtävänanto ja ratkaisu sekä mahdollisesti ”lisäys”-kohta, jossa on sanottu jotain ylimääräistä aiheeseen liittyvää. Luvussa 2 on joitakin lisäyksiä. Matlabilla voi tehdä visualisointeja, katso esimerkiksi Kuva 1. Laskuharjoitusten pitäjä on kiinnostunut kuulemaan vaihtoehtoisista ratkaisutavoista ja neuvoo mielellään vaikkapa Matlabin käytössä silloin kun ehtii.

1 Laskuharjoitusten ratkaisuja

Sisältö

1	Laskuharjoitusten ratkaisuja	1
1.1	Harjoitus 1	1
1.2	Harjoitus 2	8
1.3	Harjoitus 3	16
1.4	Harjoitus 4	21
1.5	Harjoitus 5	26
1.6	Harjoitus 6	30
1.7	Harjoitus 7	37
1.8	Harjoitus 8	38
2	Lisäyksiä	40
2.1	Trigonometrisia kaavoja	40
2.2	Perusjakson olemassaolosta	41
2.3	Konformikuvauksia eli ”tehdään hassuja kuvia”	43
2.4	Konvoluutioita	45
2.5	Cesàro-operaattorista	46

1.1 Harjoitus 1

H1T1. Olkoon $\lambda > 0$, ja olkoon $f(x)$ jaksollinen funktio, jonka perusjakso on a . Osoita,

että funktio $g(x) = f'(\lambda x)$ on jaksollinen ja määrää sen perusjakso.

Ratkaisu. Nyt siis

$$f(x+a) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

ja $a > 0$ on pienin positiivinen luku, jolla on tämä ominaisuus. Oletetaan, että f on derivoituva kaikkialla. Nyt derivoimalla yhtälöä (1) puolittain saadaan

$$f'(x+a) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siis funktiolle g pätee

$$g(x) = f'(\lambda x) = f'(\lambda x + a) = f'(\lambda(x + a/\lambda)) = g(x + a/\lambda), \quad x \in \mathbb{R},$$

eli g on a/λ -jaksollinen. Nyt $a/\lambda > 0$. Osoitetaan, että a/λ on funktion g perusjakso eli pienin positiivinen jakso. Jos luvulle $b > 0$ pätee

$$g(x+b) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

eli

$$f'(\lambda x + \lambda b) - f'(\lambda x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

niin saadaan

$$0 = \int_0^t f'(\lambda x + \lambda b) - f'(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} [f(\lambda t + \lambda b) - f(\lambda t)], \quad t \in \mathbb{R},$$

eli merkitsemällä $\lambda t = x$ saadaan

$$f(x + \lambda b) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

joten koska $a > 0$ on funktion f perusjakso ja $\lambda b > 0$, niin täytyy olla $\lambda b \geq a$ eli $b \geq a/\lambda$. Nähdään, että mielivaltainen funktion g positiivinen jakso b on vähintään a/λ . Siis a/λ on funktion g perusjakso.

H1T2. Olkoon $g(x)$ parillinen funktio. Osoita, että

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} g(x) dx.$$

Ratkaisu. Päteee siis

$$g(x) = g(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nyt

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx = \int_{-\alpha}^0 g(x) dx + \int_0^{\alpha} g(x) dx$$

eli riittää osoittaa

$$\int_{-\alpha}^0 g(x) dx = \int_0^{\alpha} g(x) dx.$$

Tekemällä muuttujanvaihto $x = -s$ ja käyttämällä oletusta saadaan

$$\int_{-\alpha}^0 g(x) dx = \int_{\alpha}^0 g(-s)(-ds) = - \int_{\alpha}^0 g(s) ds = \int_0^{\alpha} g(s) ds,$$

eli väite pätee.

H1T3. Olkoon $g(x)$ parillinen funktio. Osoita, että $g'(x)$ ja

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

ovat molemmat parittomia funktioita.

Ratkaisu. Pätee siis

$$g(x) = g(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivoimalla tätä puolittain, saadaan

$$g'(x) = g'(-x)(-x)' = -g'(-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

eli g' on pariton funktio. Toisaalta tekemällä muuttujanvaihto $t = -s$ saadaan oletuksen nojalla

$$G(-x) = \int_0^{-x} g(t)dt = \int_0^x g(-s)(-ds) = -\int_0^x g(s)ds = -G(x)$$

eli G on pariton funktio.

Lisäys. Induktiolla nähdään, että $g^{(n)}$ ja

$$g^{(-n)}(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} g(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} g(t) dt$$

ovat parittomia, kun n on pariton ja parillisia, kun n on parillinen. Tässä $g^{(-n)}$ on funktion g astetta n oleva integraalifunktio, jonka laskemiseen käytetään Cauchyn kaavaa toistetulle integroinnille.

H1T4. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Osoita, että

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

on parillinen, ja

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

on pariton funktio. Esitä tätä tietoa käyttäen funktiot $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ ja $q(x) = 1/(1-x)$ parillisen ja parittoman funktion summana.

Ratkaisu. Sieventämällä nähdään, että

$$F(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ja

$$G(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{-f(x) + f(-x)}{2} = -G(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

Siis F on parillinen ja G on pariton. Huomataan myös, että

$$F(x) + G(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Siis kirjoittamalla $f = F + G$ on funktio f saatu esitettyä parillisen ja parittoman funktion summana.

Nyt funktiolle $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ pätee

$$F_p(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + (-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x)}{2} = \frac{4x^2}{2} = 2x^2.$$

Funktio $G_p(x)$ voidaan laskea tehtäväpaperin kaavasta tai laskemalla

$$G_p(x) = p(x) - F_p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 = x^3 + x.$$

Siis

$$p(x) = F_p(x) + G_p(x) = 2x^2 + (x^3 + x),$$

missä F_p on parillinen ja G_p on pariton.

Funktiolle q voidaan laskea

$$F_q(x) = \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{2} = \frac{\frac{1+x}{1-x^2} + \frac{1-x}{1-x^2}}{2} = \frac{1}{1-x^2}$$

ja

$$G_q(x) = \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}{2} = \frac{\frac{1+x}{1-x^2} - \frac{1-x}{1-x^2}}{2} = \frac{x}{1-x^2}$$

eli

$$g(x) = F_q(x) + G_q(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2},$$

missä F_p on parillinen ja G_p on pariton.

Lisäys. Nähdään, että f voidaan esittää parillisen ja parittoman funktion summana vain yhdellä tavalla. Nimittäin, jos g on sekä parillinen että pariton, niin

$$g(x) = g(-x) = -g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

joten

$$g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siis jos funktio on sekä parillinen että pariton, niin se on identtisesti nolla. Lisäksi on selvää, että parillisten funktioiden lineaarikombinaatio on parillinen ja parittomien funktioiden lineaarikombinaatio on pariton. Oletetaan, että $f = F + G = H + I$, missä F ja H ovat parillisia ja G ja I ovat parittomia. Näin ollen $g = F - H = I - G$ on sekä parillinen että pariton ja siten identtisesti nolla. Siis $F = H$ ja $G = I$.

H1T5. Olkoon $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osoita, että

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \delta_{mn},$$

missä δ_{mn} on Kroneckerin deltafunktio.

Ratkaisu. Koska kosini on parillinen, kaavalla

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos([m-n]x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos([m+n]x) dx\end{aligned}\quad (2)$$

Toisaalta

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nimittäin

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(0 \cdot x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 1$$

ja

$$k \int_0^{\pi} \cos(kx) dx = [\sin(kx)]_{x=0}^{\pi} = \sin(k\pi) - \sin(0) = \sin(k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mikä antaa tulon nollasäännöllä

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos([m-n]x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos([m+n]x) dx \\ &= \delta_{0,m-n} + 0 = \delta_{m,n}.\end{aligned}\quad (3)$$

H1T6. Oletetaan, että $f(x)$ on jaksollinen funktio jaksonaan 2π , joka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (4)$$

missä a_n ja b_n ovat reaalisia vakioita. Määrittää vakiot b_n kertomalla (4) puolittain funktiolla $\sin(mx)$ ja integroimalla termeittäin.

Ratkaisu. Siis

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

mikä antaa

$$f(x) \sin(mx) = \frac{1}{2}a_0 \sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \sin(mx).$$

Nyt vaihtamalla integroinnin ja summauksen järjestystä saadaan sinin parittomuuden ja

Lemman 4.1. nojalla

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \\
&= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \sin(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \sin(mx) dx \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \pi d_{nm} = \pi b_m.
\end{aligned} \tag{5}$$

Siis

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

H1T7. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = x, \quad \text{kun } x \in (-\pi, \pi].$$

Piirrä funktion f kuvaaja ja muodosta funktion f Fourier-sarja. Määrä lisäksi ne arvot, joita kohti Fourier-sarja suppenee funktion f epäjatkuvuuskohdissa.

Ratkaisu. Fourier-kertoimet on määritelty asettamalla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

ja funktion f Fourier-sarja on

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Nyt koska $x \cos(nx)$ on pariton funktio kaikilla $n \in \mathbb{R}$, niin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Toisaalta koska $x \sin(nx)$ on parillinen funktio kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\pi \cos(n\pi)}{n} - 0 \right] - 0 \\
&= 2 \frac{(-1)(-1)^n}{n} = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Kuva 1: Funktion $f(x) = x$ Fourier-sarjan 10. osasumma.

Siis

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Nyt $f(x)$ toteuttaa Dirichlet'n ehdot: f on määritelty välillä $(-\pi, \pi)$, f on 2π -jaksollinen ja f sekä f' ovat paloittain jatkuvia välillä $(-\pi, \pi)$. Näin ollen

$$\frac{1}{2} (f(x_+) + f(x_-)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funktio f on jatkuva muualla, paitsi pisteissä $n\pi$, missä n on kokonaisluku. Näissä pisteissä jaksollisuuden nojalla

$$\frac{1}{2} (f(n\pi_+) + f(n\pi_-)) = \frac{1}{2} (f(-\pi_+) + f(\pi_-)) = \frac{1}{2} (-\pi + \pi) = 0$$

eli Fourier-sarjan summa on 0.

Funktion f Fourier-sarja on Kuvassa 1, joka on piirretty Matlabilla. Vastaavia kuvia voi piirtää muun muassa funktioilla, jotka löytyvät osoitteesta <http://integraali.com/fourier2014/>.

Fourier-sarjan osasummia voi piirtää näppärästi myös WolframAlpha-sivustolla. Esimerkki, jossa WolframAlphan komentoriville kirjoitettiin

```
2*sum n=1 to 10 (-1)^(n+1)*sin(nx)/n
```

1.2 Harjoitus 2

H2T1. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = x \sin(px), \quad \text{kun } x \in (-\pi, \pi],$$

missä p on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että funktion f Fourier-kertoimille pätee $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$a_p = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p}, \quad \text{ja} \quad a_n = (-1)^{p+n+1} \frac{2p}{p^2 - n^2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}.$$

Ratkaisu. Funktion $f(x) = x \sin(7x)$ jaksollisen laajennuksen kuvaaja on Kuvassa 2. Fourier-kertoimet on määritelty asettamalla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

ja funktion f Fourier-sarja on

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Nyt, koska f on parillinen, niin $f(x) \sin(nx)$ on pariton ja siten $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen $f(x) \cos(nx)$ on parillinen, joten

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(px) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x (\sin((p-n)x) + \sin((p+n)x)) dx,$$

missä käytettiin kaavaa $2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$. Nyt

$$\int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = 0, \quad k = 0,$$

ja arvoilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx &= \left[\frac{-x \cos(kx)}{k} \right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(kx)}{k} dx \\ &= \frac{-\pi \cos(k\pi)}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} + 0. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(2px) dx = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p}$$

ja arvoilla $n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$ saadaan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin((p-n)x) + x \sin((p+n)x) dx = \frac{(-1)^{p-n+1}}{p-n} + \frac{(-1)^{p+n+1}}{p+n}.$$

Kuva 2: Funktion $f(x) = x \sin(7x)$ jaksollisen laajennuksen kuvaaja

Nyt huomataan, että

$$p - n = (p + n) - 2n,$$

joten koska $(-1)^{-2n} = 1$, niin voidaan laskea

$$a_n = \frac{(-1)^{p+n-2n+1}}{p-n} + \frac{(-1)^{p+n+1}}{p+n} = (-1)^{p+n+1} \left[\frac{p+n}{p^2-n^2} + \frac{p-n}{p^2-n^2} \right] = (-1)^{p+n+1} \frac{2p}{p^2-n^2}.$$

Siis

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

missä

$$a_p = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p} \quad \text{ja} \quad a_n = (-1)^{p+n+1} \frac{2p}{p^2-n^2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}.$$

H2T2. Laske

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-4}$$

käyttäen hyväksi tehtävän 1 Fourier-sarjaa pisteessä $x = 0$ tai $x = \pi$, kun $p = 1$ tai $p = 2$.

Ratkaisu. Arvolla $p = 1$ saadaan

$$a_0 = (-1)^2 \frac{2 \cdot 1}{1^2 - 0^2} = 2, \quad a_1 = (-1)^3 \frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2},$$

ja

$$a_n = (-1)^{n+2} \frac{2}{1-n^2} = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}, \quad n \geq 2.$$

Nyt funktio f toteuttaa Dirichlet'n ehdot eli f on 2π -jaksollinen ja f sekä f' ovat paloittain jatkuvia välillä $(-\pi, \pi]$. Lisäksi f on kaikkialla jatkuva. Näin ollen

$$f(x) = x \sin x = \frac{1}{2} (f(x_-) + f(x_+)) = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos(nx)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = 0$ saadaan

$$f(0) = 0 = 1 - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad \text{eli} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}.$$

Toisaalta valinta $x = \pi$ tuottaisi

$$0 = 1 + \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} (-1)^n \quad \text{eli} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Arvolla $p = 2$ saadaan

$$a_2 = \frac{(-1)^{2 \cdot 2 + 1}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}, \quad a_0 = (-1)^{2+0+1} \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 0^2} = -1$$

ja

$$a_1 = (-1)^{2+1+1} \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 1^2} = \frac{4}{3}$$

sekä

$$a_n = (-1)^{2+n+1} \frac{4}{4 - n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2 - 4}, \quad n \geq 3.$$

Koska $f(x) = x \sin(2x)$ on jatkuva ja 2π -jaksollinen, sekä f' on paloittain jatkuva, niin

$$x \sin(2x) = \frac{1}{2} (f(x_-) + f(x_+)) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cos x - \frac{1}{4} \cos(2x) + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 4} \cos(nx)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = \pi$ saadaan

$$-\frac{1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4} = \pi \sin 2\pi = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4} = \frac{25}{48}.$$

Toisaalta valinta $x = 0$ antaisi

$$-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 4} = 0 \sin 0 = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 4} = \frac{7}{12}.$$

H2T3. Muodosta funktion $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, kosiniterminen Fourier-sarja etsimällä ensin sopiva funktion $f(x)$ parillinen laajennus. Sarjaksi tulee

$$f(x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(nx).$$

Ratkaisu. Haetaan kosinitermistä Fourier-sarjaa, joten koska kosini on parillinen, niin tehdään funktiolle parillinen laajennus. Asetetaan siis parillisuuden saamiseksi

$$f(x) = f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = |\sin x|, \quad x \in (-\pi, 0).$$

Nähdään, että $f(x) = |\sin x|$ kaikilla $x \in (-\pi, \pi]$ ja nyt f voidaan laajentaa jaksolliseksi jatkuvaksi funktioksi.

Koska f on parillinen, $f(x) \sin(nx)$ on pariton ja $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Fourier-sarjaan ei siis tule sinitermejä. Toisaalta, koska $f(x) \cos(nx) = \sin x \cos(nx)$ on parillinen

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((1-n)x) + \sin((n+1)x) dx$$

kaavan

$$2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

nojalla. Nyt

$$\int_0^{\pi} \sin(kx) = 0, \quad k = 0,$$

ja arvoilla $k \neq 0$ saadaan

$$\int_0^\pi \sin(kx) = \left(\frac{-\cos(kx)}{k} \right)_{x=0}^\pi = \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} 0, & k = 2m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{2}{k}, & k = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Siis jos n on pariton, niin $1 - n$ ja $n + 1$ ovat parillisia ja $a_n = 0$. Olkoon $n = 2m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. Nyt $1 - n = 1 - 2m$ ja $n + 1 = 2m + 1$, joten

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin((1 - n)x) + \sin((n + 1)x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1 - 2m} + \frac{2}{2m + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4m + 2}{4m^2 - 1} + \frac{4m - 2}{4m^2 - 1} \right) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4m^2 - 1}. \end{aligned}$$

Erityisesti $a_0 = \frac{4}{\pi}$. Koska f toteuttaa Dirichlet'n ehdot ja on kaikkialla jatkuva, niin saadaan

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

H2T4. Osoita tehtävän 3 avulla, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu. Sijoittamalla tehtävän 3 sarjaan $x = 0$ saadaan huomaamalla, että $f(0) = 0$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Toisaalta koska $\cos(2n\frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ ja $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, niin sijoittamalla $x = \frac{\pi}{2}$ saadaan

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = 1 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Voidaan toki sijoittaa mikä tahansa muukin muuttujan x arvo, jolloin saadaan jonkun sarjan summa. Tietyillä muuttujan x arvoilla $\cos(2nx)$ ottaa yksinkertaisen muodon ja sarja näyttää yksinkertaiselta.

Huomaa, että jos funktio f ei olisikaan jatkuva pisteessä x , niin sarjan summaksi tulisi

$$\frac{1}{2} (f(x_-) + f(x_+)) \neq f(x).$$

Tässä on mahdollinen virheen paikka!

H2T5. Osoita, että funktiojoukko

$$\{1, \cos(2x), \cos(4x), \cos(6x), \dots\}$$

on ortogonaalinen välillä $[0, \pi]$ ja muodosta sitä vastaava ortonormaali joukko.

Ratkaisu. Nyt ollaan välillä $[0, \pi]$ ja on siis sisätulo

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$

Olkoon $f_k(x) = \cos(2kx)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Nyt kosinin parillisuuden nojalla

$$\langle f_k, f_j \rangle = \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2jx)dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos(2kx) \cos(2jx)dx = \frac{\pi}{2} \delta_{k,j}$$

kaikilla $k, j \in \mathbb{N}_0$ paitsi arvolla $k = j = 0$, sillä

$$\|f_0\|^2 = \langle f_0, f_0 \rangle = \int_0^\pi \cos(0) \cos(0)dx = \pi \text{ eli } \|f_0\| = \sqrt{\pi}.$$

Näin ollen $\{1, \cos(2x), \cos(4x), \cos(6x), \dots\}$ on ortogonaalinen. Lisäksi

$$\|f_k\|^2 = \langle f_k, f_k \rangle = \frac{\pi}{2} \quad \text{eli} \quad \|f_k\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siis vastaava ortonormaali joukko on

$$\left\{ \frac{f_k}{\|f_k\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(2x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(4x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(6x), \dots \right\}.$$

H2T6. Laske funktion $f(x) = \cos x$ yleistetyt Fourier-kertoimet tehtävän 5 ortonormaalin joukon suhteen.

Ratkaisu. Nyt väli ja sisätulo ovat samat kuin tehtävässä 5 ja $f(x) = \cos x$. Funktiot $e_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ sekä $e_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(2kx)$, $k \in \mathbb{N}$, ovat ortonormaaleja, joten jos haetaan Fourier-kertoimia c_k , joille pätee

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k,$$

niin saadaan yleistettyjen Fourier-kertoimien kaava

$$\langle f, e_n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \langle e_k, e_n \rangle = c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nyt kosinin parillisuuden nojalla

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^\pi d_n \cos x \cos(2nx)dx = d_n \int_{-\pi}^\pi \cos x \cos(2nx)dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

missä $d_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ja $d_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen kaikki yleistetyt Fourier-kertoimet ovat nollia.

Nyt funktiota f yritettiin esittää funktioiden e_k summana, mutta nähtiin, että tällaista esitystä ei voi tehdä. Nähtiin, että vakiot c_n ovat nollia, eli funktio f sattuu jopa olemaan ortogonaalinen jokaisen funktion e_k suhteen.

Analoginen tilanne olisi kokeilla esittää $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ vektorien $(0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ avulla. Esitystä

$$(1, 0, 0) = a(0, 1, 0) + b(0, 0, 1),$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$, ei löydy. Vektori $(1, 0, 0)$ sattuu jopa olemaan kohtisuorassa vektoreita $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ vastaan. Esitys ei onnistu, koska $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ei ole avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Vastaavasti esitys $f = \sum c_k e_k$ ei onnistu, koska $\{e_k\}$ ei ole kanta tämänhetkisen tilanteen funktioavaruudelle, joka sisältää funktion f .

H2T7. Määritä vakiot $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ siten, että polynomit

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \alpha_0 \\ g_2(x) &= \beta_1 x + \beta_0 \\ g_3(x) &= \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 \end{aligned}$$

muodostavat ortonormaalin joukon välillä $[-1, 1]$.

Ratkaisu. Nyt ollaan välillä $[-1, 1]$, joten sisätulona on

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in \mathcal{C}_p(-1, 1),$$

ja normi on $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$, kaikilla $f \in \mathcal{C}_p(-1, 1)$.

Tapa 1. Lasketaan luvut $\langle g_k, g_j \rangle$, $k, j \in \{1, 2, 3\}$, ja vaaditaan, että $\langle g_k, g_j \rangle = \delta_{kj}$. Sadaan kuuden yhtälön yhtälöryhmä ja voidaan ratkaista kuusi vakiota $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ yksikäsitteisesti.

Tapa 2. Otetaan funktiojoukko $\{1, x, x^2\}$ ja käytetään Gram-Schmidtin ortonormalisointimenetelmää. Gram-Schmidtin menetelmässä lineaarisesti riippumattomalle funktiojoukolle $\{f_n\}$ tehdään seuraavaa.

Koska funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia, mikään funktio ei ole identtisesti nolla. Asetetaan

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|},$$

jolloin $\{e_1\}$ on ortonormaali.

Oletetaan, että on saatu määriteltyä ortonormaali funktiojoukko $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Nyt asetetaan

$$w_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle f_{n+1}, e_k \rangle e_k,$$

jolloin

$$\langle w_{n+1}, e_m \rangle = \langle f_{n+1}, e_m \rangle - \sum_{k=1}^n \langle f_{n+1}, e_k \rangle \langle e_k, e_m \rangle = \langle f_{n+1}, e_m \rangle - \langle f_{n+1}, e_m \rangle = 0,$$

eli löydetään uusi ortogonaalinen funktio w_{n+1} . Lineaarisen riippumattomuuden nojalla $w_{n+1} \neq 0$, joten voidaan asettaa

$$e_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|},$$

jolloin $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ on ortonormaali joukko.

Jos joukon $\{f_n\}$ lineaarista riippumattomuutta ei vaadita, niin ortonormalisoinnin joka vaiheessa syntyvän joukon $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lineaarinen riippumattomuus varmistettaisiin poistamalla turhat funktiot f_j .

Tehdään nyt Gram-Schmidtin ortogonalisointi funktioille

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1 \\f_2(x) &= x \\f_3(x) &= x^2.\end{aligned}$$

Koska

$$\|f_1\|^2 = \int_{-1}^1 f_1(x) f_1(x) dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2,$$

niin $\|f_1\| = \sqrt{2}$, ja

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nyt

$$\langle f_2, e_1 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{2}} dx = 0,$$

joten

$$w_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1 = f_2.$$

Koska

$$\|w_2\|^2 = \|f_2\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

niin $\|w_2\| = \sqrt{2/3}$, ja

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Nyt

$$\langle f_3, e_1 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ja

$$\langle f_3, e_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0,$$

joten

$$w_3 = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Koska

$$\|w_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = 2 \int_0^1 x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45},$$

niin $\|w_3\| = \sqrt{8/45}$, ja

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \sqrt{45/8} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Valitaan

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_0 = 0 = \gamma_1, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \gamma_0 = -\sqrt{\frac{5}{8}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}.$$

1.3 Harjoitus 3

H3T1. Funktion $f(x) = \sin x$ kosiniterminen Fourier-sarja välillä $[0, \pi]$ on

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + 1}{1 - n^2} \cos(nx).$$

Soveltamalla tätä tietoa yhdessä Parsevalin kaavan kanssa osoita, että

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Ratkaisu. Parsevalin kaava löytyy luennoista, mutta laskuharjoitusten pitäjä johtaa sen itselleen tässä. Jos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

missä $\{e_n\}$ on ortonormaali kanta, niin sisätulon ominaisuuksilla saadaan

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n \overline{c_k} \langle e_n, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Nyt sisätulona on

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

ja ortonormaali kanta on

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cup \{ \cos(nx) \} \cup \{ \sin(nx) \}$$

siis $c_0^2 = \frac{a_0^2}{2}$ ja asettamalla vaikkapa $c_{2n-1}^2 = a_n^2$ ja $c_{2n}^2 = b_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, saadaan luentojen kaava

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Koska f on pisteiden $n\pi$ ulkopuolella kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolla on jaksona 2π , niin funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f Lauseen 4.7. nojalla ja Lauseen 8.3. nojalla tämä kaava pätee.

Nyt $a_0/2 = 2/\pi$ eli $a_0 = 4/\pi$ ja $a_0^2/2 = 8/\pi^2$. Toisaalta $b_n = a_{2n-1} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$a_{2n} = \frac{2 \cos(2n\pi) + 1}{\pi (1 - (2n)^2)} = -\frac{4}{\pi (2n-1)(2n+1)},$$

joten

$$a_{2n}^2 = \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^2 (2n+1)^2}$$

Toisaalta

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx = 1.$$

Saadaan

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

eli

$$\frac{\pi^2 - 8}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots.$$

H3T2. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi \leq x < 0 \\ 1, & \text{kun } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Etsi muotoa

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$$

oleva trigonometrinen polynomi siten, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 dx$$

on mahdollisimman pieni.

Ratkaisu. Luentojen nojalla kyseessä on funktion f Fourier-sarjan N :s osasumma. Funktion f Fourier-sarjaa voidaan siis pyytää esitettäväksi tällaisellakin tehtävänannolla. Koska f on pariton, niin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ja

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} [-\cos(nx)]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1}), \end{aligned} \tag{7}$$

joten

$$b_{2n} = 0 \quad \text{ja} \quad b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siis

$$f(x) \frac{4}{\pi} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x$$

ja etsitty polynomi on

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{n\pi} \sin(nx).$$

H3T3. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että $f(x) = e^{2x}$, kun $-\pi < x \leq \pi$. Muodosta funktion f kompleksiterminen Fourier-sarja.

Ratkaisu. Halutaan kirjoittaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Valitaan $L = \pi$, jolloin

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(2-in)x}}{2-in} \right]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{2\pi} (e^{-i\pi})^n - e^{-2\pi} (e^{i\pi})^n}{2\pi(2-in)} \\ &= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi(2-in)} = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{2-in}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8)$$

H3T4. Osoita, että

$$2 \sum_{n=1}^m \cos[(2n-1)\theta] = \frac{\sin(2m\theta)}{\sin \theta},$$

kun $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Ratkaisu. **Tapa 1.** Noudatetaan tehtäväpaperin vihjettä ja lasketaan samantapaisesti kuin Tavassa 2.

Tapa 2. Eulerin kaavan mukaan

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Siis

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^m \cos[(2n-1)x] + i \sum_{n=1}^m \sin[(2n-1)x] \\ &= \sum_{n=1}^m e^{i(2n-1)x} = e^{-ix} \sum_{n=1}^m (e^{i2x})^n \\ &= e^{-ix} \frac{e^{i2x}(1 - e^{i2xm})}{1 - e^{i2x}} \cdot \frac{1 - e^{-i2x}}{1 - e^{-i2x}} \\ &= \frac{e^{ix}(1 - e^{-i2x})(1 - e^{i2xm})}{(1 - e^{i2x})(1 - e^{-i2x})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Nyt

$$e^{ix}(1 - e^{-i2x}) = e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

ja

$$(1 - e^{i2x})(1 - e^{-i2x}) = 2 - (e^{i2x} + e^{-i2x}) = 2(1 - \cos(2x)) = 4 \sin^2(x),$$

joten

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m \cos[(2n-1)x] + i \sum_{n=1}^m \sin[(2n-1)x] \\ &= \frac{2i \sin x}{4 \sin^2 x} (1 - \cos 2xm - i \sin 2xm) \\ &= \frac{\sin(2xm)}{2 \sin x} + i \frac{1 - \cos(2xm)}{2 \sin x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Vasemman ja oikean puolen reaali-osat ovat yhtäsuuret, joten saadaan

$$\sum_{n=1}^m \cos[(2n-1)x] = \frac{\sin(2xm)}{2 \sin x} \quad (11)$$

ja imaginaariosista saadaan

$$\sum_{n=1}^m \sin[(2n-1)x] = \frac{1 - \cos(2xm)}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 mx}{\sin x} \quad (12)$$

kun $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Etuna Tapaan 1. oli nyt se, että saatiin kaava sekä kosinin että sinin summille, joissa argumenttia x kerrotaan parittomilla luvuilla.

H3T5. Osoita, että Dirichlet-ytimille pätee yhtälö

$$2 \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

kun $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Ratkaisu. Luennoissa määriteltiin

$$D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Siis

$$D_k(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^k \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Eulerin kaavan nojalla

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^m \cos(nx) + i \sum_{n=0}^m \sin(nx) = \sum_{n=0}^m (e^{ix})^n \\ &= \frac{1 - (e^{ix})^{m+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{\cos(m+1/2)x - \cos(x/2) + i [\sin(m+1/2)x + \sin(x/2)]}{2i \sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(m+1/2)x}{2 \sin(x/2)} - \frac{i \cos(m+1/2)x - \cos(x/2)}{2 \sin(x/2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Vasemman ja oikean puolen reaali-osat ovat yhtäsuuret, joten saadaan

$$2 \sum_{n=1}^m \cos(nx) = -1 + \frac{\sin(m+1/2)x}{\sin(x/2)} \quad (14)$$

ja imaginaariosista saadaan

$$2 \sum_{n=0}^m \sin(nx) = \frac{\cos(x/2) - \cos(m+1/2)x}{\sin(x/2)}, \quad (15)$$

kun $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Yhtälö (14) on luennoissa mainittu Lagrangen trigonometrinen yhtälö. Siis

$$D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos(nx) = \frac{\sin(m+1/2)x}{2 \sin(x/2)}$$

eli

$$D_k(2t) = \frac{\sin(2k+1)t}{2 \sin(t)}$$

ja siten

$$2 \sum_{k=0}^{N-1} D_k(2t) = \frac{1}{\sin t} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2k+1)t = \frac{1}{\sin t} \sum_{k=1}^N \sin(2k-1)t = \frac{\sin^2(Nt)}{\sin^2(t)},$$

missä käytettiin tehtävän H3T3 kaavaa (12). Sijoitetaan $t = x/2$, jolloin saadaan

$$2 \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

kuten haluttiin.

H3T6. Olkoot $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jaksollisia 2π -jaksoisia funktioita siten, että $f, g, h \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Ratkaisu. Konvoluution ja summafunktion määritelmien sekä integraalin ominaisuuksien nojalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f * (g + h))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g + h)(x - y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g(x - y) + h(x - y)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)h(x - y) dy \\ &= (f * g)(x) + (f * h)(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Siis $f * (g + h) = f * g + f * h$.

1.4 Harjoitus 4

H4T1.

Olkoot $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jaksollisia 2π -jaksoisia funktioita siten, että $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että konvoluution $f * g$ kompleksikertoimisille Fourier-kertoimille c_n pätee

$$c_n = a_n b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

missä kertoimet a_n ovat funktion f , ja b_n funktion g , kompleksikertoimiset Fourier-kertoimet.

Vihje: Voit vaihtaa kertoimien c_n lausekkeessa integroimisjärjestystä Fubinin lauseen avulla.

Ratkaisu. Funktioiden f ja g konvoluutio on määritelty kaavalla

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) e^{-inx} dy dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) e^{-inx} dx dy, \end{aligned} \tag{17}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Fubinin lauseesta. Nyt voidaan tehdä muuttujanvaihto $x - y = t$ ja huomata, että funktioiden f, g ja e^{-inx} 2π -jaksollisuuden nojalla integroimisvälit eivät muutu, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(t) e^{-in(t+y)} dt dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right) = a_n b_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{18}$$

H4T2.

Olkoon $f(x) = x$ ja $g(x) = \sin x$. Laske konvoluutio $(f * g)(x)$.

Ratkaisu. Käytetään konvoluution määritelmää ja sinin summakaavaa sekä huomataan, että $y \cos y$ on pariton ja $y \sin y$ on parillinen funktio, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin(x-y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y [\sin(x) \cos(-y) + \cos(x) \sin(-y)] dy \\ &= \frac{-\cos(x)}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin(y) dy. \end{aligned} \tag{19}$$

Nyt

$$\int_0^\pi y \sin(y) dy = [-y \cos(y)]_{y=0}^\pi - \int_0^\pi -\cos(y) dy = -\pi \cos(\pi) = \pi,$$

joten nähdään, että $(f * g)(x) = -\cos(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

H4T3.

Olkoon $s_n = (-1)^n(2n+1)$, missä $n \in \mathbb{N}_0$. Osoita, että

$$t_N = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N s_j$$

ei suppene kohti raja-arvoa, mutta

$$\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N t_j$$

suppenee. Toisin sanoen, Cesàron menettelytavan soveltaminen kerran ei tuota suppenevaa jonoa, mutta toinen sovelluskerta kyllä.

Ratkaisu. Määritellään Cesàron operaattori. Jos $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ on jono, niin asetetaan

$$\text{Ces } (a)_N = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N a_j, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

Tavanomaiseen tapaan merkataan funktioiden iteraatteja potensseilla: jos $f : X \rightarrow X$ on funktio, niin asetetaan $f^0 = \text{Id}$ ja $f^n = f(f^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Siis esimerkiksi $f^3(x) = f(f(f(x)))$. Siis jono, joka saadaan, kun jonoon s sovelletaan Cesàron menettelytapaa kerran, on jono $\text{Ces } (s)$. Toisaalta jono, joka saadaan, kun jonoon s sovelletaan Cesàron menettelytapaa kahdesti, on jono $\text{Ces }^2(s)$.

Huomataan, että funktiolla Ces on käänteisfunktio. Jos

$$b = \text{Ces } (a)$$

niin

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j \quad \text{eli} \quad \sum_{j=0}^n a_j = (n+1)b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Siis $a_0 = b_0$ ja

$$a_n = \sum_{j=0}^n a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j = (n+1)b_n - nb_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siis

$$\text{Ces }^{-1}(b)_n = (n+1)b_n - nb_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

missä $b_{-1} := 0$. Nyt tehtävänannon jonolle saadaan, että

$$\text{Ces } (s)_n = (-1)^n$$

eli $\text{Ces } (s)_n$ ei suppene, mutta

$$\text{Ces }^2(s)_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

Taulukko 1: Tehtävän H4T3 jonon (s_n) Cesàro-kuvia. Viidennellä rivillä on esimerkkilaskuja.

n	$1/(n+1)$	s_n	$(n+1) \text{ Ces } (s)_n$	$\text{Ces } (s)_n$	$(n+1) \text{ Ces }^2(s)_n$	$\text{Ces }^2(s)_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	1/2	-3	-2	-1	0	0
2	1/3	5	3	1	1	1/3
3	1/4	-7	-4	-1	0	0
4	1/5	9	5=1-3+5-7+9	1=5 ·(1/5)	1=1-1+1-1+1	1/5=1 ·(1/5)
5	1/6	-11	-6	-1	0	0
6	1/7	13	7	1	1	1/7
7	1/8	-15	-8	-1	0	0
8	1/9	17	9	1	1	1/9
9	1/10	-19	-10	-1	0	0
10	1/11	21	11	1	1	1/11
11	1/12	-23	-12	-1	0	0
12	1/13	25	13	1	1	1/13
13	1/14	-27	-14	-1	0	0
14	1/15	29	15	1	1	1/15
15	1/16	-31	-16	-1	0	0

kun $n \rightarrow \infty$.

Sivuston <http://integraali.com/fourier2014/cesaro/> Matlab-funktiolla 'cesaro.m' voi käyttää Cesàron menetelmää erilaisiin lukujonoihin. Taulukon 1 $\text{\LaTeX}$ -koodi saatiin Matlabista funktiolla 'latextaulukkor.m'.

H4T4.

Anna esimerkki jonosta, jossa Cesàron menettelytavan soveltaminen kaksi kertaa ei tuota suppenevaa jonoa, mutta kolmas sovelluskerta tuottaa.

Ratkaisu. Tehtävässä 3 jonolle Cesàron menettelytapaa piti käyttää kahdesti, että jono saatiin suppenemaan. Käyttämällä käänteistä Cesàron menettelytapaa tehtävän 3 jonoon saadaan siis haluttu jono. Siis olkoon $s = (s_n)$ kuten tehtävässä 3 ja valitaan $a = \text{Ces}^{-1}(s)$. Jonon a lukuja on laskettu Matlabilla Taulukkoon 2.

H4T5.

Osoita, että jos $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, niin

$$\frac{1}{\tan(x/2)} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sin(jx) \quad \text{Cesàron mielessä.}$$

Taulukko 2: Tehtävän H4T3 jonon (s_n) Cesáro-alkukuva ja sen Cesáro-alkukuva. Viiden-
nellä rivillä on esimerkkilaskuja. Tässä siis esimerkiksi $a_n = \text{Ces}^{-1}(s)_n = (n+1)s_n -$
 ns_{n-1} , missä $s_{-1} := 0$.

n	$1/(n+1)$	s_n	$(n+1)s_n$	$a_n = \text{Ces}^{-1}(s)_n$	$(n+1)a_n$	$\text{Ces}^{-2}(s)_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	1/2	-3	-6	-7	-14	-15
2	1/3	5	15	21	63	77
3	1/4	-7	-28=4·(-7)	-43	-172	-235
4	1/5	9	45=5·9	73=45-(-28)	365	537
5	1/6	-11	-66	-111	-666	-1031
6	1/7	13	91	157	1099	1765
7	1/8	-15	-120	-211	-1688	-2787
8	1/9	17	153	273	2457	4145
9	1/10	-19	-190	-343	-3430	-5887

Ratkaisu. Yhtälön (15) nojalla

$$2 \sum_{j=0}^m \sin(jx) = \frac{\cos(x/2) - \cos((m + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} = \frac{1}{\tan(x/2)} - \frac{\cos((m + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)},$$

joten

$$S_m(x) = 2 \sum_{j=0}^m \sin(jx) - \frac{1}{\tan(x/2)} = -\frac{\cos((m + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

Yhtälön (11) nojalla saadaan arvoilla $2t = x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(2t) \\ &= \frac{-1}{\sin t} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \cos(2k+1)t \\ &= \frac{-1}{\sin t} \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \cos(2k-1)t \\ &= \frac{-1}{\sin t} \frac{1}{N+1} \frac{\sin(2x(N+1))}{2 \sin t} \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{20}$$

kun $N \rightarrow \infty$. Siis Cesàron mielessä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{j=0}^n \sin(jx) - \frac{1}{\tan(x/2)} = 0.$$

H4T6.

Olko $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva ja jaksollinen funktio, jaksonaan 2π . Jos funktion f Fourier-
sarja suppenee pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$, eli raja-arvo

$$a = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0)$$

on olemassa, niin näytä, että tällöin välttämättä $a = f(x_0)$.

Ratkaisu. Oletuksista seuraa, että $f \in L^\infty[-\pi, \pi]$. Näin ollen Fourier-sarja Cesàro-suppenee pisteessä x_0 funktion arvoon:

$$\sigma_N(x_0) \rightarrow f(x_0), \quad N \rightarrow \infty.$$

Oletuksen nojalla Fourier-sarja suppenee myös tavallisessa mielessä pisteessä x_0 :

$$S_N(x_0) \rightarrow a, \quad N \rightarrow \infty.$$

Kun tavallinen raja-arvo on olemassa, niin Cesàro-raja-arvo yhtyy tähän, eli

$$\sigma_N(x_0) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S_j \rightarrow a, \quad N \rightarrow \infty.$$

Näin ollen raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $a = f(x_0)$.

1.5 Harjoitus 5

H5T1.

Jatkuvan, mutta ei missään derivoituvan funktion olemassaolo on ääriesimerkki siitä, että funktion toistuva derivointi voi johtaa hyvin poikkeukselliseen (ja huonoon) funktiokäytännötyymiseen. Olkoon $\varepsilon > 0$, $K > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ mielivaltaisesti valittuja vakioita. Määää vakiot A , M ja θ siten, että funktiolla

$$f(x) = A \sin(Mx + \theta)$$

pätee $|f^{(k)}(x)| \leq \varepsilon$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $0 \leq k < n$, mutta $|f^{(n)}(0)| \geq K$.

Ratkaisu. Sinin summakaavan nojalla

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) = \sin(x + \pi/2), \quad x \in \mathbb{R},$$

mistä saadaan ketjusäännöllä

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = \frac{d}{dx} \sin(x + \pi/2) = \cos(x + \pi/2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siis jos derivoidaan siniä tai kosiniä, niin argumentti kasvaa luvulla $\pi/2$. Induktiolla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} \sin(x) &= \sin(x + k\pi/2), \\ \frac{d^k}{dx^k} \cos(x) &= \cos(x + k\pi/2), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{21}$$

Nyt siis

$$f^{(k)}(x) = AM^k \sin(Mx + \theta + k\pi/2), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0,$$

eli

$$f^{(n)}(0) = AM^n \sin(\theta + n\pi/2)$$

ja asettamalla $\theta = -(n-1)\pi/2$ saadaan

$$f^{(n)}(0) = AM^n \sin(\pi/2) = AM^n.$$

Oletetaan, että $A, M \geq 0$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq AM^k, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0 \\ |f^{(n)}(0)| &= AM^n. \end{aligned} \tag{22}$$

Oletetaan aluksi, että $K \leq \varepsilon$. Nyt voidaan valita $M = 1$ ja $A = K$, jolloin

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq AM^k = K \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0 \\ |f^{(n)}(0)| &= AM^n = K. \end{aligned} \tag{23}$$

Oletetaan nyt, että $K > \varepsilon$. Pitäisi saada

$$\begin{aligned} AM^k &\leq \varepsilon, \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ K &\leq AM^n. \end{aligned} \tag{24}$$

Jos $M > 1$, niin $k \mapsto M^k$ on kasvava ja riittää saada vaikkapa

$$\begin{aligned} AM^{n-1} &= \varepsilon, \\ AM^n &= K, \end{aligned} \tag{25}$$

joka toteutuu, kun $M = K/\varepsilon > 1$ ja $A = \varepsilon^n/K^{n-1}$. Valitaan siis

$$\theta = -(n-1)\frac{\pi}{2}, \quad M = 1, \quad A = K, \quad \text{kun } K \leq \varepsilon,$$

ja

$$\theta = -(n-1)\frac{\pi}{2}, \quad M = \frac{K}{\varepsilon}, \quad A = \frac{\varepsilon^n}{K^{n-1}}, \quad \text{kun } K > \varepsilon.$$

H5T2.

Kokonaislukujonon $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sanotaan olevan lakunaarinen, jos

$$0 \leq a_1 < a_2 < \dots$$

ja jos on olemassa $q > 1$ ja $N \geq 1$ siten, että $a_{n+1} \geq qa_n$ kaikille $n \geq N$. (Tämä on eri asia kuin luentorungossa esitetty lakunaarinen Fourier-sarja, vaikkakin asiayhteys on olemassa.) Mitkä seuraavista jonoista ovat lakunaarisia? Perustele vastauksesi.

a) $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{2^k\}_{k \in \mathbb{N}}$

b) $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(k!)^2\}_{k \in \mathbb{N}}$

c) $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{k(k+1)(k+2)\}_{k \in \mathbb{N}}$

Ratkaisu. a) Nyt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2 =: q > 1, \quad k \geq 1 =: N,$$

eli lukujono on lakunaarinen.

b) Nyt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{(k+1)!}{k!} \right)^2 = (k+1)^2 \geq 2^2 = 4 =: q, \quad k \geq 1 =: N,$$

eli lukujono on lakunaarinen.

c) Nyt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{k} = 1 + \frac{3}{k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Näin ollen lakunaarisuusehto ei voi päteä. Ehdon särkyminen voidaan laskea vaikka seuraavalla tavalla. Olkoon $q > 1$ mielivaltainen. Valitaan $K \in \mathbb{N}$ siten, että $K > 3/(q-1)$ eli $q-1 > 3/K$. Nyt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{3}{k} \leq 1 + \frac{3}{K} < 1 + q - 1 = q, \quad k \geq K,$$

eli lakunaarisuusehto ei voi päteä arvolla q .

H5T3.

Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots)$ tasan jakautunut välille $[0, 1)$ ja olkoon $b \in [0, 1)$. Osoita, että

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0, b)\}}{N} = b.$$

Vihje:

$$\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0, b)\} = \#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (0, b)\} + \#\{1 \leq n \leq N : \eta_n = 0\}.$$

Ratkaisu. Tasan jakautuneisuuden määritelmän mukaan ehdosta $(a, b) \subset [0, 1)$ seuraa

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (a, b)\}}{N} = b - a.$$

Erityisesti

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (0, b)\}}{N} = b.$$

Siis ”satunnaisesti lukujonosta valittu alkio on välillä $(0, b)$ todennäköisyydellä b ” tai ”lukujonon alkioista $100b\%$ on välillä $(0, b)$ ”.

Osoitetaan nyt, että ”satunnaisesti lukujonosta valittu alkio on 0 todennäköisyydellä 0”. Sitten voidaan vihjettä noudattaen päätellä, että ”satunnaisesti lukujonosta valittu alkio on välillä $[0, b)$ todennäköisyydellä b ” eli, että nollan lisääminen suotuisien tapahtumien joukkoon ei lisää todennäköisyyttä.

Aluksi nähdään, että

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N}{N} = \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0, 1)\}}{N} \\ &= \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in \{0\}\}}{N} + \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (0, 1)\}}{N}. \end{aligned} \tag{26}$$

Siis

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in \{0\}\}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (0, 1)\}}{N} = 1 - (1 - 0) = 0.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0, b)\}}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in \{0\}\}}{N} + \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (0, b)\}}{N} \\ &= 0 + (b - 0) = b. \end{aligned} \tag{27}$$

H5T4.

Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots)$ tasan jakautunut välille $[0, 1)$ ja olkoon $0 \leq a < b \leq 1$. Osoita käyttämällä apuna tehtävää H5T3, että

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b]}(\eta_n) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x) dx.$$

Ratkaisu. Huomataan, että

$$\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0, b)\} = \sum_{n=1}^N \chi_{[0,b]}(\eta_n).$$

Siis tehtävän H5T3 nojalla

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,b]}(\eta_n) = b = \int_0^1 \chi_{[0,b]}(x) dx.$$

Nyt $\chi_{[a,b]} = \chi_{[0,b]} - \chi_{[0,a]}$ ja voidaan laskea

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a,b]}(\eta_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,b]}(\eta_n) - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[0,a]}(\eta_n) \\ &= \int_0^1 \chi_{[0,b]}(x) dx - \int_0^1 \chi_{[0,a]}(x) dx \\ &= \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x) dx. \end{aligned} \tag{28}$$

H5T5.

Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots)$ tasan jakautunut välille $[0, 1)$ ja olkoon $0 \leq a_k < b_k \leq 1$ kaikilla $k = 1, \dots, K$. Olkoon

$$g(x) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \chi_{[a_k, b_k]}(x), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_K \in \mathbb{C}.$$

Osoita käyttämällä apuna tehtävää H5T4, että

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\eta_n) = \int_0^1 g(x) dx.$$

Ratkaisu. Tehtävän H5T4 avulla voidaan laskea

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\eta_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \lambda_k \chi_{[a_k, b_k]}(\eta_n) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[a_k, b_k]}(\eta_n) \\ &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \int_0^1 \chi_{[a_k, b_k]}(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^K \lambda_k \chi_{[a_k, b_k]}(x) dx = \int_0^1 g(x) dx. \end{aligned} \tag{29}$$

1.6 Harjoitus 6

H6T1.

Osoita, että yhtälöllä

$$y'' + 0,02y' + 25y = \frac{4}{\pi n^2} \cos(nt)$$

on yksityisratkaisu

$$y_n = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt),$$

missä

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{\pi n^2 [(25 - n^2)^2 + (0,02)^2]}$$

ja

$$B_n = \frac{0.08}{\pi n [(25 - n^2)^2 + (0,02)^2]}.$$

Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinnitetty. Lähdetään etsimään yksityisratkaisua yrittäällä. Koska oikealla puolella on termi $\cos(nt)$, niin yritteeksi tulee valita jotain samannäköistä ja sopivan mielivaltaista. Kosinin lisäksi mukaan on hyvä ottaa sini. Tehdään siis yrite

$$y = A \cos(nt) + B \sin(nt).$$

Saadaan

$$\begin{aligned} y' &= -An \sin(nt) + Bn \cos(nt) \\ y'' &= -An^2 \cos(nt) - Bn^2 \sin(nt) = -n^2 y. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} &y'' + 0,02y' + 25y \\ &= (25 - n^2)y + 0,02y' \\ &= [A(25 - n^2) + 0,02Bn] \cos(nt) + [B(25 - n^2) - 0,02An] \sin(nt) \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \cos(nt) \end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned} A(25 - n^2) + 0,02Bn &= \frac{4}{\pi n^2} \\ B(25 - n^2) - 0,02An &= 0. \end{aligned}$$

Voidaan ratkaista alemmasta yhtälöstä

$$B = \frac{0,02An}{(25 - n^2)}$$

ja kun tämä sijoitetaan ylempään yhtälöön, saadaan

$$A(25 - n^2) + 0,02 \frac{0,02An}{(25 - n^2)} n = A \left[\frac{(25 - n^2)^2 + (0,02n)^2}{(25 - n^2)} \right] = \frac{4}{\pi n^2}.$$

Siis

$$A = \frac{4(25 - n^2)}{\pi n^2 [(25 - n^2)^2 + (0,02)^2]}$$

ja

$$B = \frac{0,02An}{(25 - n^2)} = \frac{0,02n}{(25 - n^2)} \frac{4(25 - n^2)}{\pi n^2 [(25 - n^2)^2 + (0,02)^2]} = \frac{0.08}{\pi n [(25 - n^2)^2 + (0,02)^2]}.$$

Saatiin halutut vastaukset. Vakioiden A ja B arvot riippuvat luvusta n , joten merkitään $A = A_n$ ja $B = B_n$.

H6T2.

Etsi yksityisratkaisu yhtälölle

$$y'' + cy' + y = K \sin t,$$

missä $c > 0$ ja $K \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

Ratkaisu. Jos $K = 0$, niin selvästi $y \equiv 0$ on yhtälön ratkaisu. Jos $K \neq 0$, niin etsitään ratkaisua yrittäällä. Oikealla puolella on $\sin t$, joten valitaan yritteeksi sinin ja kosinin lineaarikombinaatio

$$y = A \cos t + B \sin t.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} y' &= -A \sin t + B \cos t \\ y'' &= -A \cos t - B \sin t = -y. \end{aligned}$$

Siis

$$y'' + cy' + y = cy' = -Ac \sin t + Bc \cos t = K \sin t.$$

Siis valitaan $B = 0$ ja $A = -K/c$. Tämä valinta toimii myös tilanteessa $K = 0$. Etsitty ratkaisu on siis

$$y(t) = -\frac{K}{c} \cos t.$$

Lisäys. Huomataan, että jos $c < 0$, niin ratkaisutapa toimii myös. Jos olisi $c = 0$, niin ratkaisua ei saataisi tällä menettelyllä vaan oltaisiin umpikujassa $0 = K \sin t$. Katsotaan mielenkiinnon vuoksi tämä tilanne läpi. Olkoon $c = 0$. Nyt $y = A \sin t + B \cos t$ on ratkaisu homogeeniyhtälölle

$$y'' + y = 0.$$

Ratkaistaan epähomogeeninen yhtälö

$$y'' + y = K \sin t$$

vakion varioinnilla. Annetaan vakioiden A ja B ollakin funktioita $A(t), B(t)$. Saadaan

$$\begin{aligned} y(t) &= A(t) \sin t + B(t) \cos t \\ y'(t) &= A'(t) \sin t + A(t) \cos t + B'(t) \cos t - B(t) \sin t \\ y''(t) &= A''(t) \sin t + 2A'(t) \cos t - A(t) \sin t + B''(t) \cos t - 2B'(t) \sin t - B(t) \cos t. \end{aligned}$$

Saadaan

$$y'' + y = A''(t) \sin t + 2A'(t) \cos t + B''(t) \cos t - 2B'(t) \sin t = K \sin t.$$

eli vaikkapa $A'' - 2B' = K$ ja $2A' + B'' = 0$. Siis vaikkapa $A \equiv 0$ ja $B = -Kt/2$ käy. Haluttu ratkaisu olisi

$$y(t) = -\frac{Kt}{2} \sin t.$$

H6T3.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden vakiokertoimista päästään usein eroon sopivalla muuttujanvaihdoilla. Etsi sopiva vakio A siten, että sijoitus $t = A\tau$ lämpöyhtälöön

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sieventää sen muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Muunna vastaavalla tavalla aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

muotoon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ratkaisu. Ketjusäännön ja alkuperäisen yhtälön nojalla

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial A\tau}{\partial \tau} = \alpha A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Lämpöyhtälön muuttujanvaihdoissa tulee siis valita $A = 1/\alpha$.

Merkitään nyt derivointia alaindeksillä. Siis esimerkiksi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t.$$

Aaltoyhtälölle saadaan ketjusäännön, tulon derivoimissäännön ja alkuperäisen yhtälön nojalla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = u_{\tau\tau} = (u_\tau)_\tau = (u_t t_\tau)_\tau = u_{tt} (t_\tau)^2 + u_t t_{\tau\tau} = c^2 u_{xx} (t_\tau)^2 + u_t t_{\tau\tau}.$$

Nyt $t = A\tau$ eli $t_\tau = A$ ja $t_{\tau\tau} = 0$. Saadaan

$$u_{\tau\tau} = c^2 A^2 u_{xx}.$$

Aaltoyhtälön muuttujanvaihdoissa tulee siis valita $A = 1/c$ tai $A = -1/c$.

H6T4.

Etsi muotoa $u(x, t) = X(x)T(t)$ oleva ratkaisu lämpöyhtälölle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

kun $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja

$$u(x, 0) = 1 + 3 \cos(2x) + 2 \cos(4x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ratkaisu. Yhtälö on nyt annettu alueessa $0 < x < \pi$, $t > 0$ eli ”suorakulmiossa” $(x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty)$. Koska alue on suorakulmio, on mielekästä yrittää separoida muuttujat eli tehdä yrite $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Yritteen antama ratkaisu on johdettu luentorungossa ja siten

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-2k^2 t} \sin(kx),$$

missä

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(t) \sin(kt) dt.$$

Nyt

$$u_0(x) = 1 + 3 \cos(2x) + 2 \cos(4x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

ja tulisi siis laskea kertoimet A_k . Lasketaan kertoimet osissa ja käytetään yläindeksejä. Ensimmäinen termi antaa

$$A_k^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt = \left[\frac{-\cos(kt)}{k} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k).$$

Siis indeksin k parillisilla arvoilla $A_k^1 = 0$ ja

$$A_{2m-1}^1 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tämän laskun nojalla

$$\begin{aligned} A_k^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((k-2)t) + \sin((k+2)t) dt \\ &= \frac{2}{(k-2)\pi} (1 - (-1)^{k-2}) (1 - \delta_{k,2}) + \frac{2}{(k+2)\pi} (1 - (-1)^{k+2}) \\ &= (1 - (-1)^k) \left(\frac{2}{(k-2)\pi} (1 - \delta_{k,2}) + \frac{2}{(k+2)\pi} \right) \end{aligned}$$

Siis indeksin k parillisilla arvoilla $A_k^2 = 0$ ja muulloin

$$A_k^2 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{k-2} + \frac{1}{k+2} \right) = \frac{8}{\pi} \frac{k}{k^2 - 4}$$

eli

$$A_{2m-1}^3 = \frac{8}{\pi} \frac{2m-1}{(2m-1)^2 - 4}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Analogialla nähdään, että

$$A_k^3 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(4t) \cdot \sin(kt) dt = 0,$$

kun k on parillinen ja että

$$A_{2m-1}^3 = \frac{8}{\pi} \frac{2m-1}{(2m-1)^2 - 16}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Siis $A_{2m} = 0$, $m \in \mathbb{N}$, ja

$$A_{2m-1} = A_{2m-1}^1 + 3A_{2m-1}^2 + 2A_{2m-1}^3 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2m-1} + \frac{6(2m-1)}{(2m-1)^2 - 4} + \frac{4(2m-1)}{(2m-1)^2 - 16} \right).$$

H6T5.

Etsi muotoa $u(x, t) = X(x)T(t)$ oleva ratkaisu aaltoyhtälölle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

kun $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja

$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ratkaisu. Luentorungossa johdettiin ratkaisulle kaava

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) [A_k \cos(kct) + B_k \sin(kct)],$$

missä

$$A_k = \int_0^\pi u_0(t) \sin(kt) dt$$

ja

$$B_k = \frac{1}{kc} \int_0^\pi u_1(t) \sin(kt) dt.$$

Nyt $u_1(x) = u_t(x, 0) = 0$, joten $B_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Vastaavasti $u_0(x) = u(x, 0) = x(\pi - x)$, joten

$$A_k = \int_0^\pi t(\pi - t) \sin(kt) dt.$$

Taulukkointegroimalla (osittaisintegroimalla) saadaan

D	I	F	R
$\pi t - t^2$	$\sin(kt)$		
$\pi - 2t$	$\frac{-\cos(kt)}{k}$	$t(\pi - t) \frac{-\cos(kt)}{k}$	
-2	$\frac{-\sin(kt)}{k^2}$	$(\pi - 2t) \frac{\sin(kt)}{k^2}$	
0	$\frac{\cos(kt)}{k^3}$	$-2 \frac{\cos(kt)}{k^3}$	0

Eli

$$\int t(\pi - t) \sin(kt) dt = t(\pi - t) \frac{-\cos(kt)}{k} + (\pi - 2t) \frac{\sin(kt)}{k^2} - 2 \frac{\cos(kt)}{k^3}$$

Siis

$$\begin{aligned} A_k &= \left[t(\pi - t) \frac{-\cos(kt)}{k} + (\pi - 2t) \frac{\sin(kt)}{k^2} - 2 \frac{\cos(kt)}{k^3} \right]_{t=0}^{\pi} \\ &= \left[-2 \frac{\cos(kt)}{k^3} \right]_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{k^3} (1 - (-1)^k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (30)$$

Siis

$$A_{2m} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

ja

$$A_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)^3}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Sijoittamalla kertoimet A_k sarjaan, saadaan

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin((2k-1)x) \cos((2k-1)ct).$$

H6T6.

Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx) + w \sin(wx)}{1+w^2} dw = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, \\ \pi e^{-x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Ratkaisu. Valitaan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \pi e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Koska f ja f' ovat paloittain jatkuvia, niin Lauseen 17.4 nojalla

$$\tilde{F}(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) + B(w) \sin(wx) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

missä

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$$

ja

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt.$$

Tulee siis laskea kerroinfunktiot A ja B . Nyt

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(wt) dt.$$

Taulukkointegroimalla (osittaisintegroimalla) saadaan

D	I	F	R
$\cos(wt)$	e^{-t}		
$-w \sin(wt)$	$-e^{-t}$	$-\cos(wt)e^{-t}$	
$-w^2 \cos(wt)$	e^{-t}	$w \sin(wt)e^{-t}$	$-w^2 \cos(wt)e^{-t}$

eli

$$\int \cos(wt)e^{-t}dt = -\cos(wt)e^{-t} + w \sin(wt)e^{-t} + \int -w^2 \cos(wt)e^{-t}dt$$

eli

$$\int \cos(wt)e^{-t}dt = \frac{w \sin(wt)e^{-t} - \cos(wt)e^{-t}}{1 + w^2}.$$

Siis

$$A(w) = \left[\frac{w \sin(wt)e^{-t} - \cos(wt)e^{-t}}{1 + w^2} \right]_{t=0}^{\infty} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{1 + w^2} = \frac{1}{1 + w^2}.$$

Vastaavasti

$$B(w) = \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(wt)dt,$$

joten taulukko

D	I	F	R
$\sin(wt)$	e^{-t}		
$w \cos(wt)$	$-e^{-t}$	$-\sin(wt)e^{-t}$	
$-w^2 \sin(wt)$	e^{-t}	$-w \cos(wt)e^{-t}$	$-w^2 \sin(wt)e^{-t}$

antaa

$$\int \sin(wt)e^{-t}dt = -\sin(wt)e^{-t} - w \cos(wt)e^{-t} + \int -w^2 \sin(wt)e^{-t}dt$$

eli

$$\int \sin(wt)e^{-t}dt = \frac{-w \cos(wt)e^{-t} - \sin(wt)e^{-t}}{1 + w^2}.$$

Siis

$$B(w) = \left[\frac{-w \cos(wt)e^{-t} - \sin(wt)e^{-t}}{1 + w^2} \right]_{t=0}^{\infty} = 0 + 0 + \frac{w}{1 + w^2} + 0 = \frac{w}{1 + w^2}.$$

Siis

$$\tilde{F}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(wx) + w \sin(wx)}{1 + w^2} dw = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, \\ \pi e^{-x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

1.7 Harjoitus 7

H7T1.

Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(\pi w)}{w} \sin(wx) dw = \begin{cases} \pi/2, & \text{kun } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{kun } x > \pi. \end{cases}$$

Ratkaisu.

H7T2.

Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right) \cos(wx)}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & \text{kun } |x| < \pi/2 \\ 0, & \text{kun } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Ratkaisu.

H7T3.

Muodosta funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 < x < a \\ 0, & \text{kun } x \geq a \end{cases}$$

kosini-integraaliesitys.

Ratkaisu.

H7T4.

Muodosta funktion

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x}, \quad x > 0,$$

kosini-integraaliesitys.

Ratkaisu.

H7T5.

Etsi

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Vihje: Sovella Laplacen integraalia.

Ratkaisu.

H7T6.

Etsi funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{kun } x > 0 \\ 0, & \text{kun } x \leq 0 \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

Ratkaisu.

1.8 Harjoitus 8

H8T1.

Etsi funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{kun } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

Ratkaisu.

H8T2.

Olkoon $\mathcal{F}(f(t))$ funktion $f(t)$ Fourier-muunnos ja $a \in \mathbb{R}$ vakio. Osoita, että

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-iwa} \mathcal{F}(f(t)).$$

Ratkaisu.

H8T3.

Etsi Lauseen 19.9 avulla

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2}).$$

Ratkaisu.

H8T4.

Olkoon $g \in L^1(-\infty, \infty)$. Käytä Fourier-muunnosta differentiaaliyhtälön

$$u'' - u + 2g(x) = 0$$

ratkaisun $u(x) = g * e^{-|x|}$ löytämiseksi. Mitä oletuksia ratkaisun tulee toteuttaa, jotta menetelmää voi soveltaa?

Ratkaisu.

H8T5.

Osoita, että

$$f * g = g * f,$$

missä f ja g sellaisia funktiota, että konvoluutiot $f * g$ ja $g * f$ ovat hyvin määriteltyjä.

Ratkaisu.

H8T6.

Olkoot $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellaisia funktiota, että $(f * g) \cdot h$ ja $f * (g \cdot h)$ ovat hyvin määriteltyjä. Tarkastele pätee yhtälö

$$(f * g) \cdot h = f * (g \cdot h),$$

toisin sanoen, onko konvoluutio assosiatiiivinen tulon kanssa?

Ratkaisu.

2 Lisäyksiä

2.1 Trigonometrisia kaavoja

Tehtävässä H1T5 tarvittiin kaavaa

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

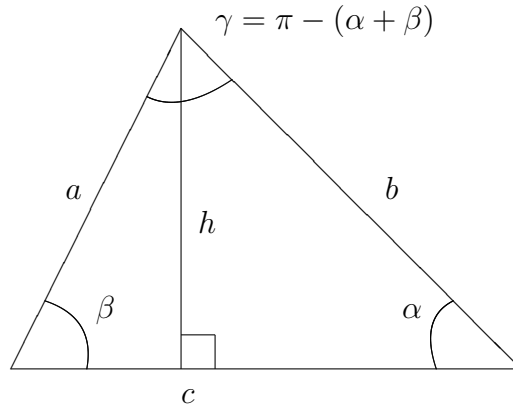
Kerrataan kaavan

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) - \sin(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

alkeisgeometrisen todistus ja johdetaan siitä tehtävän H1T5 kaava. Kaavan oikeellisuus nähdään Kuvasta 3, joka löytyi Googlen kuvahauulla osoitteesta <http://i.stack.imgur.com/dhFCv.jpg>.

Ohessa oleva todistus on peräisin lehdestä Dimensio 6/2013, sivu 62.

Kuva 3: Sinin summakaava.



Oheisessa kuvassa

$$h = b \sin \alpha = a \sin \beta$$

eli

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}.$$

Symmetrian nojalla

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Tätä kutsutaan sinilauseeksi. Nyt kosinin määritelmän ja sinilauseen nojalla

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha = \left(c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right) \cos \beta + \left(c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right) \cos \alpha.$$

Kertomalla puolittain luvulla $(\sin \gamma)/c$ saadaan

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Koska kolmion kulmien summa on π , niin $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Toisaalta yksikköympyrästä nähdään, että $\sin(\pi - x) = \sin x$ kaikilla x . Näin ollen $\sin \gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$. Siis saatiin

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Sijoittamalla luvun β paikalle luku $-\beta$ saadaan

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

Summaamalla kaksi viimeistä kaavaa yhteen, saadaan

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

eli kaava (31) pätee. Nyt kaava (31) eli

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

antaa derivoimalla puolittain muuttujan x suhteen

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Jos taas derivoidaan muuttujan y suhteen ja kerrotaan luvulla -1 , saadaan

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Siis kaavat

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos y &= \sin(x - y) + \sin(x + y); \\ 2 \cos x \cos y &= \cos(x - y) + \cos(x + y); \\ 2 \sin x \sin y &= \cos(x - y) - \cos(x + y); \end{aligned} \tag{32}$$

pätevät kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Jos yksi kaava tiedetään, muut saadaan siitä esimerkiksi derivoimalla. Voidaan itseasiassa osoittaa, että funktiot $\sin$ ja $\cos$ voidaan jatkaa derivoituviksi koko kompleksitasossa ja että ylläolevat kaavat pätevät kaikilla $x, y \in \mathbb{C}$.

2.2 Perusjakson olemassaolosta

Antti Puurosen esittämällä todistustavalla saadaan seuraava tulos.

Lause 2.1. *Jaksollisella ei-vakiolla funktiolla, joka on jatkuva vähintään yhdessä pisteessä, on perusjakso.*

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jaksollinen perusjaksoton funktio ja jatkuva pisteessä $a \in \mathbb{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä a , niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(a) \in (f(x) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ kaikilla $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Koska funktiolla f ei ole perusjaksoa, löydetään $c \in (0, \delta)$ siten, että c on funktion f jakso. Näin ollen

$$f(\mathbb{R}) \subseteq f([a, a + c)) \subseteq f((a - \delta, a + \delta)) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Luku $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) = \{f(a)\}$$

eli f on vakio. □

2.3 Konformikuvauksia eli ”tehdään hassuja kuvia”

Tehtävässä **H2T7** ortonormitettiin monomit $\{1, x, x^2\}$ sisätulon

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

suhteen käyttämällä yhtälöryhmää tai Gram-Schmidtin ortonormitusmenetelmää. Vastaavalla tavalla Gram-Schmidtin ortonormitusmenetelmällä monomeista voidaan ortonormittaa myös muiden sisätulojen suhteen. Toisaalta kun lasketaan funktion yleistetyt Fourier-kertoimet jonkun ortonormaalin kannan suhteen voidaan funktio joskus esittää sarjana kannan alkioista. Tämä on hyvin yleinen toiminta-ajatus.

Kirjassa Duren, Schuster - Bergman spaces, kerrotaan seuraavaa.

Olkoon Ω kompleksitason $\mathbb{C}$ osajoukko niin, että Ω on rajoitettu yhdesti yhtenäinen (reiätön) alue (yhtenäinen avoin joukko). Tällöin on olemassa *Bergmanin ydinfunktio* $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ siten, että jos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen (derivoituva) funktio ja pintaintegraali

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 dA(z) \quad (33)$$

on äärellinen, niin voidaan kirjoittaa

$$f(z) = \int_{\Omega} f(\zeta) K(z, \zeta) dA(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

Siis funktion f arvo jossain tietyssä pisteessä z saadaan laskemalla sisätulo

$$\langle f, k_z \rangle,$$

missä $k_z(\zeta) = \overline{K(z, \zeta)}$ ja sisätulo on määritelty asettamalla

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(z) \overline{g(z)} dA(z).$$

Funktiolla K on paljon hyviä ominaisuuksia. Paljastuu, että jos $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ on ortonormaali kanta ehdon (33) toteuttavien analyyttisten funktioiden avaruudelle $A^2(\Omega)$, niin

$$K(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(\zeta)}, \quad z, \zeta \in \Omega.$$

Siis funktio K tiedetään heti, jos löydetään joku ortonormaali kanta $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Toisaalta, jos φ on ns. *normalisoitu Riemannin kuvausfunktio* alueelle Ω pisteessä ζ eli $\varphi : \Omega \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ on analyyttinen bijektio ja $\varphi(\zeta) = 0$ ja $\varphi'(\zeta) > 0$, niin

$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta, \zeta)}} K(z, \zeta), \quad z \in \Omega.$$

Näin ollen funktion K avulla saadaan φ' ja sitten tätä integroimalla saadaan φ .

Siis ortonormittamalla monomit sisätulon suhteen, laskemalla vähän ja integroimalla keran saadaan funktio φ . Funktio φ on kiinnostava sen vuoksi, että se on bijektiivinen

Kuva 4: Shakkilauta ja osa venytetystä shakkilaudasta.

kuvaus alueelta Ω yksikkökielelle $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ja analyyttisenä funktiona φ säilyttää kulmien suuruudet. Tavallaan φ ”vääntele ja venyttelee siistillä tavalla” alueesta Ω alueen $\mathbb{D}$.

Aiheeseen liittyviä kuvia on nähtävillä osoitteessa <http://integraali.com/fourier2014/conformal/>. Demojen pitäjä piirsi ”venytetyt” kuvat Matlabilla käyttäen kansion ”functions” Matlab-funktioita. Kuitenkin projekti jäi jostain syystä aikoinaan kesken. Kuva 4 on vajavainen makupala.

Kuva 5: Muutama ydin.

Kuva 6: Konvoluutio murtoviivan kanssa.

2.4 Konvoluutioita

Sivulla <http://integraali.com/fourier2014/konvoluutioita/> on laskuharjoitusten pitäjän tekemiä konvoluutioihin liittyviä Matlab-funktioita.

- Funktio 'murtof.m' piirtää murtoviivafunktion ammuttavasta pistejoukosta.
- Funktio 'konvydin.m' piirtää konvoluutioytimen ammuttavasta pistejoukosta.
- Funktio 'ytimet.m' antaa Gaussin, Dirichlet'n ja Fejerin ytimiä.
- Funktio 'konvo.m' laskee kahden tiettyä tyyppiä olevan funktion konvoluution.

Kuvat 5-9 esittävät muutaman ytimen sekä erään murtoviivafunktion konvoluutioita näiden ytimien kanssa.

Kuva 7: Konvoluutio tyyppiä $y(x) = \exp(-1/(1-x^2))$ olevan Gaussin käyrän kanssa.

Kuva 8: Konvoluutio Dirichlet-ytimen D_7 kanssa.

Kuva 9: Konvoluutio Fejer-ytimen F_7 kanssa.

2.5 Cesàro-operaattorista

Laskuharjoitusten pitäjä on parasta aikaa funktionaalianalyysin kurssilla ja päätti sen vuoksi piristää mieltään lukemalla internetistä lisää Cesàron menetelmästä. Jos $a = (a_n)_{n=0}^\infty$ on jono kompleksilukuja, niin asetetaan

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

arvoilla $p \in (0, \infty)$. Jos $\|a\|_p < \infty$, niin merkitään $a \in \ell^p$ eli ℓ^p on ”itseisesti potenssilla p summautuvien jonojen avaruus”. Koska kurssilla, esimerkiksi tehtävässä **H4T3**, nähtiin, että $\text{Ces}(a)$ on käyttäytyy jossain mielessä jonona paremmin kuin a , niin voi aavistaa, että $\|\text{Ces}(a)\|_p$ olisi joskus jossain mielessä rajoitettu luvulla $\|a\|_p$.

Sivulla

<https://datuan5pdes.files.wordpress.com/2014/08/hardys-inequality.pdf>

osoitetaankin, että jos $p \in (1, \infty)$, niin kompleksiselle lukujonolle b_k

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n b_k \right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p.$$

Kolmioepäyhtälön avulla ja soveltamalla tulosta tapauksessa $b_k = |a_k|$, saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \right|^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k| \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p.$$

Siis

$$\|\text{Ces}(a)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \right|^p \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} = \frac{p}{p-1} \|a\|_p.$$

Siis

$$\sup_{\|a\|_p \neq 0} \frac{\|\text{Ces}(a)\|_p}{\|a\|_p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Sanotaan, että $\text{Ces} : \ell^p \rightarrow \ell^p$ on rajoitettu operaattorimielessä: ”kuvan normi on korkeintaan vakio kertaa argumentin normi”. Nähdään vielä, että jos a ja b ovat jonoja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ovat vakioita, niin $\text{Ces}(\alpha a + \beta b) = \alpha \text{Ces}(a) + \beta \text{Ces}(b)$. Siis Ces on lineaarinen.

On nähty, että vaikka sarja hajaantuu, sillä voi olla mielekäs summa, kun summataan lukuja jollain uudella tavalla. Summausmenetelmistä puhutaan esimerkiksi Wikipediassa: http://en.wikipedia.org/wiki/Divergent_series.

Joku voi pitää hajaantuvien sarjojen käyttöä outona - Wikipediasta löytyy hauska kasku:

Borel, then an unknown young man, discovered that his summation method gave the 'right' answer for many classical divergent series. He decided to make a pilgrimage to Stockholm to see Mittag-Leffler, who was the recognized lord of complex analysis. Mittag-Leffler listened politely to what Borel had to say and then, placing his hand upon the complete works by Weierstrass, his teacher, he said in Latin, 'The Master forbids it'.

– Mark Kac, quoted by Reed & Simon (1978, p. 38)