
Kleinin ryhmät

Harjoitukset 1

1. Olkoot $z_i, i \leq 3$, kolme erillistä $\overline{\mathbf{C}}$:n pistettä. Olkoon S pisteiden z_i määräämä Möbiusympyrä ja olkoot D_1 ja D_2 $\overline{\mathbf{C}}$:n komponentit. Osoita, että merkinnät voidaan valita s.e. jos $k(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ niin D_1 sisältää ne pisteet $z \in \overline{\mathbf{C}}$ joille $\text{Im } k(z) > 0$, D_2 ne pisteet joille $\text{Im } k(z) < 0$ ja S ne pisteet joille $k(z)$ on reaalinen tai ∞ . *Ohje.* Käytä kaksoissuhteen Möbiusinvarianssia ja kuvaa kolmikko (z_1, z_2, z_3) kolmikolle $(\infty, 0, 1)$.
2. Etsi kaikki Möbiuskuvaukset joilla on kiintopisteinä -1 ja 1 käyttämällä hyväksi tietoa että nämä saadaan konjugoimalla Möbiuskuvauksella muotoa $z \mapsto \lambda z$ oleva kuvaus. Mikä näistä vaihtaa i :n ja $-i$:n ja mitä λ :n arvoa se vastaa?
3. Olkoon f Möbiuskuvaus joka vie pisteet 0 ja ∞ pisteille $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Osoita kaksoissuhdetta käyttämällä että f kuvaa origokeskiset ympyrät muotoa

$$\{z \in \overline{\mathbf{C}} : \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = r\}$$

oleville ympyröille.

4. Määritellään relaatio $f \sim g$ Möbiuskuvauksille s.e. $f \sim g$ jos ja vain on olemassa Möbiuskuvaus h jolle $g = hfh^{-1}$. Osoita, että relaatio on ekvivalenssirelaatio.
5. Olkoot A ja B joukkoja ja $h : A \rightarrow B$ bijektio. Olkoon G_A bijektioiden $A \rightarrow A$ joukko ja vastaavasti G_B bijektioiden $B \rightarrow B$ joukko. Pidetään tunnettuina että jos ryhmätoimitus on kuvausten yhdistäminen, niin G_A ja G_B ovat ryhmiä. Osoita että kuvaus $k : G_A \rightarrow G_B$ jossa $k(f) = hfh^{-1}$ on isomorfismi $G_A \rightarrow G_B$.

Huom. Jos haluaa suorittaa kurssin harjoitustyöllä, edellytetään aktiivista osallistumista harjoituksiin.