Kleinin ryhmät
Harjoitukset 2

1. Osoita että matriisin jälki $\operatorname{tr} A$, eli diagonaalielementtien summa, toteuttaa $\operatorname{t}r\,AB = \operatorname{tr} BA$ ja tämän perusteella että $\operatorname{tr} BAB^{-1} = \operatorname{tr} A$. Tämän voi oikeastaan tehdä samalla vaivalla $n \times n$-matriiseille.

2. Olkoon $g(z) = \lambda z$ ja olkoon $f = hgh^{-1}(z)$. Osoita, että g:n kiintopisteet ovat $z_0 = h(0)$ ja $z_1 = h(\infty)$ ja että $g'(z_0) = \lambda$ ja $g'(z_1) = 1/\lambda$. Jos g on loxodrominen, miten tästä voidaan päätellä kumpi kiintopisteistä on puoleensävetävä kiintopiste ts. se piste ζ jota kohti $g^n(\zeta)$ suppenee $n \to \infty$ (paitsi jos ζ on toinen kiintopisteistä).

3. Olkoon
$$f(z) = \frac{iz}{z+1}.$$
Mitkä ovat f:n kiintopisteet? Määrää käyttäen matriisin jälkeä f:n tyyppi. Etsi λ s.e. f on konjugoitu muotoa $z \mapsto \lambda z$ olevan kuvauksen kanssa. Vertaa tätä tehtävästä 2 saatuun λ:aan

4. Olkoot f_i ja f jatkuvia kuvauksia $\overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$. Osoita, että $f_i \to f$ tasaisesti pallometriikassa jos ja vain jos $f_i(z_i) \to f(z)$ aina kun z_i on $\overline{\mathbf{C}}$:n jono s.e. $z_i \to z$.

5. (Lemma 2.6 b). Osoita, että jos $h_i \to h$ tasaisesti ja g_i on konvergenssijono jonka puoleensavetävä piste on on a ja työntävä piste b, niin $g_i \circ h_i$ on konvergenssijono, jonka puoleensavetävä piste on a ja työntävä piste $h^{-1}(b)$.