Kleinin ryhmät
Harjoitukset 3

1. Olkoon $T_a(z) = z + a$ ja $G = \{T_{n+mi} : n, m \in \mathbf{Z}\}$. Osoita, että G on Kleinin ryhmä jolle $L(G) = \{\infty\}$.

2. Olkoon $S_a(z) = -z + a$ ja olkoon $G =\{S_n : n \in \mathbf{Z}\} \cup \{T_n, n \in \mathbf{Z}\}$, $T_n$kuten yllä. Osoita, että G on Kleinin ryhmä. Mikä on $L(G)$? Etsi sen loxodromiset, paraboliset ja elliptiset elementit. Mikä on elliptisten elementtien kertaluku?

3. Olkoot g ja h elliptisiä tai loxodromisia (toisistaan riippumatta) Möbiuskuvauksia joilla on yksi ja vain yksi yhteinen kiintopiste a. Osoita, että jos Möbiusryhmä G sisältää g:n ja h:n, niin G sisältää parabolisen elementin. *Ohje.* Tässä voi konjugoida niin, että $a = \infty$ jolloin kuvaukset muotoa $z \mapsto \lambda z + b$. Tässä sanotaan λ:aa kertoimeksi. Mikä on yhdistetyn kuvauksen kerroin? Miten g:n kerroin muuttuu konjugoitaessa h:lla?

4. Olkoon G Möbiusryhmä joka sisältää parabolisen ja loxodromisen alkion joilla on yhteinen kiintopiste a. Osoita, ettei G ole diskreetti. *Ohje.* Taas voi olettaa etta $a = \infty$. Osoita, että G sisältää siirtoja $z \mapsto z + \beta$ jossa β voi olla mielivaltaisen pieni.

5. Olkoon $K \subset \Omega(G)$ kompakti, G Kleinin ryhmä. Osoita että $gK \cap K \neq \emptyset$ vain äärellisen monelle $g \in G$.