Kleinin ryhmät
Harjoitukset 4

1. Olkoon $z \in L(G)$ ja oletaan että radassa Gz on vähintäin 2 pistettä. Osoita, että Gz on tiheässä $L(G)$:ssä, t.s. jokainen ei-tyhjä osajoukko sisältää vähintäin yhden Gz:n pisteen.

2. Pisteen z rata Kleinin ryhmän G suhteen on $Gz = \{g(z) : g \in G\}$. Osoita, että joukot Gz, $z \in \overline{\mathbf{C}}$, muodostavat $\overline{C}$:n osituksen. Ts. jokainen $w \in \overline{C}$ on yhdessä ja vain yhdessä joukoista Gz.

3. Osoita. että pisteen z ja joukon A stabiloijat G_z ja G_A (vrt luennot) ovat G:n aliryhmiä. Jos $\Gamma = hGh^{-1}$, niin osoita että $\Gamma_{h(z)} = hG_zh^{-1}$.

4. Olkoon M modulaariryhmä, t.s. $f \in M$ jos voidaan esittää mudossa
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
jossa $ad - bc = 1$ ja a, b, c, d kokonaislukuja. Osoita, että pisteen ∞ rata on rationaalilukujen joukko + piste ∞. Osoita tämän perusteella että jokainen rationaalipiste on parabolin kuvauksen kiintopiste ja että $L(M) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. *Ohje.* Muista että lukujen n ja m suurin yhteinen tekijä voidaan esittää muodossa $pn + qz$ jossa $p, q \in \mathbf{Z}$.

5. Olkoon G Kleinin ryhmä, jossa on ääretön määrä alkioita ja $L(G = \{a\}$. Osoita, että G sisältää parabolisen elementin jonka kiintopiste on a. *Ohje.* Osoita, ensin että jokainen G:n alkio on joko elliptinen tai parabolinen ja että koska G on ääretön joukko, niin käytä Seuraus 4.2:sta ja edellisen kerran harjoitustehtävää osoittamaan että G:ssä täytyy olla parabolisia elementtejä.