Kleinin ryhmät
Harjoitukset 5

1. Olkoon H Kleinin ryhmän G äärellistä indeksiä oleva aliryhmä. T.s. $G/H = \{Hg : g \in G\}$ on äärellinen joukko. Osoita, että $L(H) = L(G)$.

2. Osoita että $\Omega(G)$ on tiheässä $\overline{\mathbf{C}}$:ssä, t.s. jos U on $\overline{\mathbf{C}}$:n ei-tyhjä avoin joukko, niin $\Omega(G) \cap U \neq \emptyset$.

3. Olkoon g hyperbolinen Möbiuskuvaus ja G sen virittämä ryhmä. Tiedetään että G on Kleinin ryhmä ja $L(G)$ on g:n kiintopisteiden joukko. Osoita että $\Omega(G)/G$ on homeomorfinen toruksen $S \times S$ kanssa jossa $S = \{|z| = 1\}$. *Ohje.* Voidaan taaskin konjugoimalla olettaa että $g(z) = \lambda z$ jossa $\lambda > 1$. Kirjoita $z \in \Omega(G)$ muodossa $r\zeta$ jossa $\zeta \in S$. Kuvaa sopivasti r S:lle ja seuraa luennoilla esitettyä esimerkkiä.

4. Olkoon G äärellinen Kleinin ryhmä jonka generoi $g(z) = e^{2\pi i/n} z$. Tällöin $\Omega(G) = \overline{\mathbf{C}}$. Osoita, että $\Omega(G)/G$ on homeomorfinen $\overline{C}$:n kanssa.

5. Olkoon D avoin Möbiuskiekko (t.s. avoimen euklidisen keikon Möbiuskuva) ja g Möbiuskuvaus s.e. $g\overline{D} \subset D$. Osoita, että g on loxodrominen jonka toinen kiintopiste on D:ssä ja toinen sen ulkopuolella. *Ohje.* Osoita että g:n kertaluku on ∞. Tarkastele g^{-1}:stä ja miten se kuvaa D:n komplementin.

6. Olkoon G Kleinin ryhmä s.e. $L(G)$ sisältää vähintäin 2 pistettä. Osoita, että G sisältää loxodromisia alkioita.

   Osoita tämän perusteella että jos (g_i) on konvergenssijono jonka puoleensavetävä piste on eri kuin työntävä piste, niin g_i on loxodrominen alkaen jostai $i = n_0$.