Kleinin ryhmät
Harjoitukset 6

1. Olkoot D ja D' kaksi Möbiuskiekkoa, $z \in D$, $w \in \partial D$, $\zeta \in D'$ ja $\nu \in \partial D'$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen Möbiuskuvaus g s.e. $g(z) = \zeta$, $g(w) = \nu$ ja että $g(D) = D'$. *Ohje.* Ota mukaan peilipisteet z^* ja ζ^* ympyröiden ∂D ja $\partial D'$ suhteen. Osoita kaksoisuhdetta käyttämällä että kun z ja z' ja w ovat eri pisteitä, niin on olemasa yksikäsitteisesti määrätty Möbiusympyrä S s.e. z' on z:n peilipiste S:n suhteen ja että $w \in S$. (Tässä voi olettaa että $z = 0$ ja $z' = \infty$.)

2. Olkoon D Möbiuskiekko ja olkoon g Möbiuskuvaus s.e. $g(\partial D) = \partial D$ mutta että g vaihtaa $\overline{\mathbf{C}} \setminus S$:n komponentit. Osoita, että g on loxodrominen tai elliptinen ja konjugoitavissa muotoon $g(z) = \lambda z$ jossa $\lambda < 0$.

3. Olkoon U ylempi puolitaso ja g Möbiuskuvaus jolle $gU = U$. Osoita suoralla laskulla että
$$\frac{|g'(z)|}{v} = \frac{1}{y}$$
kun $z = x + iy$ ja $g(z) = w = u + iv$.

4. Olkoon Δ yksikkökiekko. Osoita että 0:n hyperbolinen etäisyys pisteestä $z \in \Delta$ on
$$d(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

5. Olkoon Δ kuten yllä ja $D = D(z, r) = \{w \in \Delta : d(z, w) < r\}$ r-säteinen hyperbolinen kiekko. Osoita, että $D(z, r)$ on kiekko euklidisessa metriikassa jonka euklidinen läpimitta lähenee 0:aa kun $z \to a \in \partial\Delta$ (ja r on kiinteä). *Ohje.* Sen seikan osoittamiseksi että D on euklidinen kiekko on parasta ensin olettaa että $z = 0$ ja käyttää sitten Möbiuskuvauksia.

6. Olkoon D ylemmän puolitason r-säteinen hyperbolinen kiekko jonka keskipiste on $z = is$. Osoita että
$$D = B(is \cosh r, s \sinh r)$$
kun $B(u, r)$ on u-keskinen ja r-säteinen euklidinen kiekko. *Ohje.* Käytä edellistä tehtävää jonka perusteella tiedetään että D on kiekko myös euklidisessa metriikassa. Käytä hyväksi sitä että positiivisen imaginääriakselin pisteiden hyperbolinen etäisyys on helppo laskea.

7. Olkoon Δ yksikkökiekko. Olkoon $\gamma(t) = tz$ jossa $z \in \Delta$. Osoita että γ:n hyperbolinen pituus on
$$\log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$