

Analyyysi IV

1 Lineaarialgebran peruskäsitteitä

Aiemmissa analyysin kursseissa käytettyjä aksiomerkintöjä kuten esimerkiksi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jne käytetään seuraavassa tunnetuiksi oletettuina. Merkintä $\mathbb{F}$ voi seuraavassa tarkoittaa joko yleisesti kuntaa tai joko reaalilukujen kuntaa $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$. Jälkimmäinen merkitys pätee Luvusta 2 lähtien, ellei erikseen toisin mainita. Edelleen $\mathbb{F}^n := \mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F}$ tarkoittaa karteesista tuloa, jossa tekijöitä $\mathbb{F}$ on n kappaletta. Funktion (kuvauksen) $f : X \rightarrow Y$ kuvajoukolle $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, erityisesti myöhemmin lineaarikuvauksen yhteydessä, voidaan myös käyttää merkintää fA . Samoin mahdollisesti joukon alkukuvalle $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = f^{-1}B$.

Määritelmä 1.1. Olkoon V epätyhjä joukko ja $\mathbb{F}$ kunta. Pari $(V, \mathbb{F})$ on *lineaariavaruus* (*vektoriavaruus*), jos operaatiot (laskutoimitukset) $+: V \times V \rightarrow V$ (yhteenlasku) ja $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ (skalaarilla kertominen) toteuttavat seuraavat ehdot jokaiselle $u, v, w \in V$ ja jokaiselle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$:

- (1) $u + v = v + u$
- (2) $(u + v) + w = u + (v + w)$
- (3) on olemassa $0 \in V$, jolle pätee $u + 0 = u$
- (4) on olemassa $-u \in V$, jolle pätee $u + (-u) = 0$
- (5) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- (6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- (7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- (8) $1 \cdot u = u$

Joukon V pisteitä kutsutaan seuraavassa *vektoreiksi* ja kunnan $\mathbb{F}$ pisteitä *skalaareiksi*.

Esimerkki. $(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ varustettuna kunnan yhteen- ja kertolaskulla on lineaariavaruus.

Esimerkki. Olkoon $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ $n \times m$ -matriisien joukko, joiden alkiot kuuluvat kuntaan $\mathbb{F}$. Tällöin $(M_{n \times m}(\mathbb{F}), \mathbb{F})$ varustettuna matriisien yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella on lineaariavaruus.

Esimerkki. Tarkastellaan edellisen esimerkin osajoukkoa

$$\mathcal{A} := \{ A \in M_{n \times m}(\mathbb{F}) \mid \det A = 0 \}.$$

Tällöin $(\mathcal{A}, \mathbb{F})$ varustettuna samalla yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella kuin edellisessä esimerkissä ei ole lineaariavaruus, sillä summa ei välttämättä kuulu joukkoon $\mathcal{A}$. Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ja tällöin summan determinantti on $-1 \neq 0$.

Esimerkki. Tarkastellaan paria $(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ ja käytetään karteesisen tulon $\mathbb{F}^n$ pisteille tavanomaista merkintää $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Määritellään nyt yhteenlasku ja skalaarilla $\lambda \in \mathbb{F}$ kertominen asettamalla $z + w := (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$ ja $\lambda w := (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n)$. Tällöin pari $(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ on lineaariavaruus. Erityisesti näin saadaan lineaariavaruudet $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ja $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

Huomautus. Joukon $\mathbb{F}^n$ pisteillä voidaan usein käyttää myös vastaavaa pysyvektorimerkintää

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Esimerkki. Tarkastellaan lopuksi jatkuvien funktioiden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$ joukkoa, missä nyt oletetaan, että $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ja että $\mathbb{F}$ on joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Tällöin myös oletetaan, että topologia sekä välissä $[a, b]$ että kunnassa $\mathbb{F}$ on reaaliakselin (tai kompleksitason) luonnollinen topologia. Huomaa, että jatkuvuudesta puhuminen edellyttää, että topologia sekä kuvauksen määrittely- että kuvapuolella on määritelty. Tavanomainen merkintä tarkasteltavalle joukolle on

$$\mathcal{C}_{\mathbb{F}}[a, b] := \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ jatkuva} \}.$$

Määrittelemällä yhteenlasku ja skalaarilla kertominen pisteittäin jokaiselle $t \in [a, b]$:

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t),$$

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t)$$

todetaan mekaanisella laskulla, että $(\mathcal{C}_F[a, b], \mathbb{F})$ on lineaariavaruus.

Määritelmä 1.2. Olkoon $(V, \mathbb{F})$ lineaariavaruus ja olkoon $S \subset V$ epätyhjä osajoukko. Silloin S on *lineaarinen aliavaruus*, jos S on suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen, ts. jos jokaiselle $u, v \in V$ ja jokaiselle $\lambda \in \mathbb{F}$ on $u + v \in V$ ja $\lambda u \in V$.

Seuraavassa muutama esimerkki tilanteista, joissa osajoukko S ei ole lineaarinen aliavaruus:

Esimerkki. Joukko $S = \{(a, a^2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ei ole lineaariavaruuden $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ aliavaruus, sillä S ei ole suljettu yhteenlaskun (eikä myöskään skalaarilla kertomisen) suhteen. Esimerkiksi $2(1, 1) \notin S$.

Esimerkki. Joukko $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$ ei ole aliavaruus, sillä esimerkiksi $(0, -1) = -1(0, 1) \notin S$.

Esimerkki. Joukko $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid |a| = |b| = |c|\}$ ei ole aliavaruus, sillä esimerkiksi $(-1, 1, 1) + (1, 1, 1) = (0, 2, 2) \notin S$.

Lause 1.3. Lineariavaruuden $(V, \mathbb{F})$ osajoukko S on aliavaruus jos ja vain jos $\lambda u + \mu v \in S$ kaikille $u, v \in V$ ja kaikille $\lambda \in \mathbb{F}$.

Todistus. Jos S on aliavaruus, väite seuraa suoraan määritelmästä päättelämällä peräkkäin $\lambda u \in S$, $\mu v \in S$ ja siis $\lambda u + \mu v \in S$. Toisaalta, jos väite pätee, aliavaruuden määrittelevä ominaisuudet todetaan valitsemalla $\lambda = \mu = 1$, jolloin $u + v \in V$, ja $\lambda = 1, \mu = 0$, jolloin $\lambda u \in V$.

Huomautus. Koska $u - u = 0$, nollavektori 0 kuuluu kaikkiin aliavaruuksiin.

Esimerkki. Kaikkien polynomien joukko $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ on lineaariavaruuden $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F})$ osajoukko, ja heti todettavissa myös lineaariseksi aliavaruudeksi. Samoin on välittömällä laskulla todettavissa, että $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \mid p(0) = 0\}$ on aliavaruuden $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ aliavaruus (ja myös lineaariavaruuden $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F})$ aliavaruus).

Aliavaruuskäsitteen ohella keskeisimpiä lineaariavaruuden peruskäsitteitä ovat *lineaarinen riippuvuus* ja *riippumattomuus*, *kanta* ja *dimensio*. Aluksi todetaan, että vektorien $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *linearikombinaatiolla* tarkoitetaan vektoria, joka on muotoa $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$, missä jokainen $\lambda_k \in \mathbb{F}$. Tällöin sanotaan, että vektorijoukko $\{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaarisesti riippuva, jos joillekin skalaareille $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, jotka kaikki eivät ole nollia, pätee $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$. Muussa tapauksessa sanotaan, että ko. vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton.

Huomautus. Jos yo. vektorijoukko on lineaarisesti riippuva, niin jokainen vektori v_k , jolle vastaava $\lambda_k \neq 0$, voidaan esittää sanotun vektorijoukon muiden vektorien linearikombinaationa: $v_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j / \lambda_k) v_j$.

Vektorijoukon $\{v_1, \dots, v_n\}$ *virittämällä joukolla* tarkoitetaan ko. vektorien kaikkien mahdollisten linearikombinaatioiden kokoelmaa:

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k \mid \lambda_k \in \mathbb{F}, k = 1, \dots, m \right\}.$$

Jos $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$, sanotaan, että vektorijoukko $\{v_1, \dots, v_n\}$ virittää lineaariavaruuden V .

Määritelmä 1.4. Vektorijoukko $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ on lineaariavaruuden V kanta, jos (i) $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton ja (ii) $\mathcal{B}$ virittää lineaariavaruuden V , ts. jos $\text{span}\{\mathcal{B}\} = V$.

Huomautus. Jälkimmäisen ehdon nojalla jokainen vektori $v \in V$ voidaan esittää kantavektorien linearikombinaationa. Koska kanta on lineaarisesti riippumaton joukko, ko. linearikombinaatioesitys on yksikäsitteinen. Jos nimittäin

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^n \mu_k v_k,$$

niin tällöin on $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \mu_k) v_k$, josta lineaarisen riippumattomuuden nojalla $\lambda_k - \mu_k = 0$.

Jos lineaariavaruudella V on kanta $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, sanotaan, että V on *äärellisulotteinen* lineaariavaruus, $\dim V = n$. Triviaalille lineaariavaruudelle $V = \{0\}$ asetetaan $\dim V = 0$. Kaikissa muissa tapauksissa sanotaan, että V on *ääretönulotteinen*, $\dim V = \infty$. Hiukan myöhemmin todetaan, että näin asetettu dimension määritelmä on hyvin asetettu, toisin sanoen että

äärellisulotteisessa tapauksessa kaikissa mahdollisissa kannoissa on sama alkoiden lukumäärä.

Huomautus. Lineaariavaruuden $\mathbb{R}^n$ *standardikannalla* tai *luonnollisella kannalla* $\mathcal{E}_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ tarkoitetaan alkioita $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, n$, missä k :s komponentti on $= 1$.

Päätämme tämän luvun parilla keskeisellä lauseella:

Lause 1.5. *Oletetaan, että $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$. Jos tällöin vektorijoukolle $S = \{w_1, \dots, w_n\}$ pätee $n > m$, niin S on lineaarisesti riippuva. Kääntäen, jos S on lineaarisesti riippumaton, niin $n \leq m$.*

Todistus. Aluksi todetaan, että jokainen w_j voidaan esittää lineaarikombinaationa

$$w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i,$$

koska vektorijoukko $\{v_1, \dots, v_m\}$ virittää koko avaruuden V oletuksen perusteella. Tarkastellaan nyt lineaarikombinaatiota $\sum_{j=1}^n c_j w_j = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j) v_i$. Tämä lineaarikombinaatio $= 0$, jos kertoimet c_j voidaan valita niin, että $\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = 0$ jokaiselle $i = 1, \dots, m$. Mutta tällöin kyseessä on yhtälöryhmä, jossa on tuntemattomia (c_j) enemmän (n kpl) kuin yhtälöitä (m kpl). Yhtälöryhmällä on tällöin epätriviaali ratkaisu, ts. jokin $c_j \neq 0$. Näin valitut kertoimet $c_1, \dots, c_n$ toteuttavat lineaarisen riippuvuuden määrittelyn mukaisen ehdon.

Lause 1.6. *Oletetaan, että $V \neq \emptyset$ on äärellisulotteinen lineaariavaruus, jolla on n alkioita sisältävä kanta. Tällöin*

- (1) *Jokainen lineaarisesti riippumaton vektorijoukko on avaruuden V kanta. Erityisesti, kaikissa kannoissa on sama lukumäärä alkioita.*
- (2) *Jokaisessa koko avaruuden V virittävässä vektorijoukossa on vähintään n alkioita.*

Todistus. (1) Olkoon $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ lineaarisesti riippumaton vektorijoukko avaruudessa V . Ensimmäinen väite tulee todistetuksi, jos todetaan, että S virittää koko avaruuden V . Olkoon siis $v \in V$ mielivaltainen. Edellisen

lauseen nojalla joukko $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ on lineaarisesti riippuva. Näin ollen, on olemassa skalaarit $c, c_1, \dots, c_n$, joista ainakin joku on $\neq 0$, siten, että

$$cv + \sum_{j=1}^n c_j v_j.$$

Koska S on lineaarisesti riippumaton, on $c \neq 0$, jolloin

$$v = \sum_{j=1}^n (-c_j/c) v_j.$$

Siis, $v \in \text{span}(S)$, joten $\text{span}(S) = V$.

Toisen väitteen todistamiseksi olkoon $\mathcal{B}$ oletuksen mukainen kanta, jossa on n alkia, ja olkoon $\mathcal{B}_1$ toinen kanta, jossa n_1 alkia. Koska $\mathcal{B}_1$ on lineaarisesti riippumaton ja $\mathcal{B}$ virittää koko avaruuden V , on edellisen lauseen nojalla $n_1 \leq n$. Vaihtamalla kantojen roolit edellä saadaan käänteinen epäyhtälö.

(2) Olkoon nyt $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\}$ koko avaruuden V virittävä joukko, ts. $V = \text{span}(\mathcal{A})$. Koska kanta $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton, on edellisen lauseen nojalla $n \leq m$.

Päätämme ensimmäisen esittämällä lyhyesti esimerkin avaruudesta, jonka dimensio on ääretön:

Esimerkki. Lineaariavaruuden $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ dimensio on ääretön. Osajoukko $S = \{t^n \mid n \geq 0\}$ on lineaarisesti riippumaton jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, sillä siitä, että

$$f(t) := \sum_{k=0}^n a_k t^k = 0$$

seuraa, että $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Mutta tällöin Lauseen 1.5 nojalla on mahdotonta, että kyseisellä avaruudella olisi äärellisen monta alkia sisältävä kanta.

2 Lineaarikuvaukset

Määritelmä 2.1. Olkoot V, W molemmat $\mathbb{F}$ -kertoimisia lineaariavaruuksia. Kuvaus $T : V \rightarrow W$ on *lineaarikuvaus*, jos kaikille $u, v \in V$ ja kaikille $\lambda \in \mathbb{F}$ on voimassa additiivisuus (1) ja homogeenisuus (2):

$$(1) T(u + v) = Tu + Tv,$$

$$(2) T(\lambda u) = \lambda Tu.$$

Kaikkien lineaarikuvausten $T : V \rightarrow W$ kokoelmalle käytetään merkintää $L(V, W)$. Siinä tapauksessa, että $V = W$, on tavanomaista lyhentää merkintää: $L(V) := L(V, V)$. Jos taas $V = \mathbb{F}$, toisin sanoen $(V, \mathbb{F}) = (\mathbb{F}, \mathbb{F})$, puhutaan yleensä lineaarikuvauksen sijasta *lineaarisesta funktionaalista*. Identtiselle kuvaukselle $V \rightarrow V$ käytetään tavanomaista merkintää id_V , joka siinä tapauksessa, että lineaariavaruuden V suhteen ei synny väärinkäsitystä, merkitään lyhyemmin id .

Seuraavat esimerkit osoittavat, että lineaarikuvauksen kaksi määrittelyehtoa ovat toisistaan riippumattomia.

Esimerkki. Kuvaus $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, joka määritellään asettamalla $Tz := \bar{z}$, on additiivinen, mutta ei ole homogeeninen. Additiivisuus todetaan suoralla laskulla. Ei-homogeenisuuden toteamiseksi todetaan, että

$$T(iz) = T(i(x + iy)) = T(-y + ix) = -y - ix$$

ja

$$iT(z) = iT(x + iy) = i(x - iy) = y + ix \neq T(iz).$$

Esimerkki. Määritellään kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $T(x_1, x_2) := \frac{x_2^2}{x_1}$. Tämä kuvaus on homogeeninen, mutta ei ole additiivinen. Homogeenisuus todetaan suoraan:

$$T(\lambda(x_1, x_2)) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^2 x_2^2}{\lambda x_1} = \lambda \frac{x_2^2}{x_1} = \lambda T(x_1, x_2).$$

Ei-additiivisuus todetaan laskemalla ensin

$$T(1, -1) + T(1, 1) = 1 + 1 = 2,$$

ja toteamalla, että

$$T((1, -1) + (1, 1)) = T(2, 0) = 0 \neq 2.$$

Lause 2.2. Kuvaus $T : V \rightarrow W$ on lineaarinen jos ja vain jos jokaiselle $u, v \in V$ ja jokaiselle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ on voimassa $T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv$.

Todistus. Todistus on periaatteessa samanlainen kuin Lauseen 1.3 todistus, ja jätetään lukijan itsensä tarkistettavaksi.

Huomautus. Edellisen lauseen nojalla on selvää, että

$$T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k T u_k,$$

mikä todetaan induktiotodistuksella. Erikoistapaus

$$T(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda Tu + (1 - \lambda)Tv,$$

missä $\lambda \in [0, 1]$ puolestaan sisältää geometrisen tiedon siitä, että T kuvaa pisteiden u, v määräämän ”janan” kuvapisteen Tu, Tv määräämälle ”janelle”.

Seuraavat kolme lemma sisältävät joukon lineaarikuvausten alkeellisia perusominaisuuksia:

Lemma 2.3. Olkoot V, W, Y $\mathbb{F}$ -kertoimisia lineaariavaruuksia ja oletetaan, että $T \in L(V, W)$, $S \in L(W, Y)$. Tällöin $S \circ T \in L(V, Y)$.

Todistus. Selvää on, että $S \circ T$ on kuvaus $V \rightarrow Y$, joten riittää osoittaa ko. kuvauksen lineaarisuus. Olkoon tätä varten $u, v \in V$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Tällöin on yhdistetyn kuvauksen määritelmän ja lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\lambda u + \mu v) &= S(T(\lambda u + \mu v)) = S(\lambda Tu + \mu Tv) \\ &= \lambda S(Tu) + \mu S(Tv) = \lambda(S \circ T)(u) + \mu(S \circ T)(v), \end{aligned}$$

joten kuvaus on lineaarinen Lauseen 2.2 nojalla.

Lemma 2.4. Olkoon V annettu $\mathbb{F}$ -kertoiminen lineaariavaruus, $R, S, T \in L(V)$ ja $\lambda \in \mathbb{F}$. Tällöin on voimassa

- (1) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$,
- (2) $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$,
- (3) $(S + T) \circ R = S \circ R + T \circ R$,
- (4) $\text{id} \circ T = T \circ \text{id} = T$,
- (5) $(\lambda S) \circ T = \lambda(S \circ T) = S \circ (\lambda T)$.

Todistus. Lemman todistus on lähinnä mekaaninen lasku, jossa on huomattava, että kohdan (1) todistuksessa tarvitaan ainoastaan yhdistetun kuvauksen määritelmää, mutta ei lineaarisuutta.

(1) Mielivaltaisesti valitulle pisteelle $u \in V$ todetaan, että

$$(R \circ (S \circ T))(u) = R((S \circ T)(u)) = R(S(Tu)) = (R \circ S)(Tu) = ((R \circ S) \circ T)(u),$$

josta kohdan (1) väite seuraa.

(2) Vastaavalla tavalla

$$\begin{aligned} (R \circ (S + T))(u) &= R((S + T)(u)) = R(Su + Tu) = R(Su) + R(Tu) \\ &= (R \circ S)(u) + (R \circ T)(u) = (R \circ S + R \circ T)(u). \end{aligned}$$

(3) Todistetaan samalla tavalla kuin edellinen kohta.

(4) Sivuutetaan suorana seurauksena määritelmästä $\text{id}(u) = u$.

(5) Aluksi todetaan, että

$$((\lambda S) \circ T)(u) = (\lambda S)(Tu) = \lambda S(Tu) = \lambda(S \circ T)(u).$$

Toisaalta on

$$\lambda S(Tu) = S(\lambda(Tu)) = S((\lambda T)(u)) = (S \circ (\lambda T))(u),$$

jotka yhdistämällä todetaan viimeinen väite oikeaksi.

Lemma 2.5. *Olko $T \in L(V, W)$ annettu lineaarikuvauksena. Tällöin*

(1) $T(0) = 0$;

(2) Jos U on lineaariavaruuden V lineaarinen aliavaruus, niin kuvajoukko $T(U)$ on lineaariavaruuden W lineaarinen aliavaruus ja $\dim T(U) \leq \dim U$.

(3) Jos Y on lineaariavaruuden W lineaarinen aliavaruus, niin alkukuva $T^{-1}(Y)$ on lineaariavaruuden V lineaarinen aliavaruus ja $\dim T^{-1}(Y) \leq \dim Y$.

Todistus. (1) Lineaarisuuden nojalla $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0)$, josta todetaan, että $T(0) = 2T(0) - T(0) = 0$.

(2) Jos $Tu, Tv \in U$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, niin $u, v \in U$ ja siis $\lambda u + \mu v \in U$, koska U on lineaarinen aliavaruus. Mutta tällöin $\lambda Tu + \mu Tv = T(\lambda u + \mu v) \in T(U)$ ja siis $T(U)$ on lineaarinen aliavaruus. Dimensioväite on triviaali, jos W on ääretönulotteinen. Muussa tapauksessa on $\{Tu_1, \dots, Tu_m\}$ alaiavaruuden $T(U)$ kanta. Koska sanottu kanta on lineaarisesti riippumaton, on siinä alkioita enintään yhtä monta kuin avaruuden W mielivaltaisessa kannassa Lauseen 1.5 nojalla.

(3) Todistetaan vastaavalla tavalla kuin edellinen kohta.

Määritelmä 2.6. Olkoon $T \in L(V, W)$ annettu lineaarikuvaus. Kuvauksen *ydin* (*nolla-avaruus*) on nollan alkukuva $N_T := T^{-1}(0)$. Vastaavasti *kuva-avaruus* on $R_T := T(V)$.

Lause 2.7. (1) *Ydin N_T , vast. kuva-avaruus R_T , on lineaariavaruuden V , vast. W lineaarinen aliavaruus.*

(2) *Lineaarikuvaus T on injektio jos ja vain jos $N_T = \{0\}$.*

Todistus. (1) Kuva-avaruutta R_T koskeva väite saadaan Lemman 2.5(2) erikoistapauksena valitsemalla $U = V$. Jos sitten $u, v \in N_T$, niin $Tu = 0, Tv = 0$. Jos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ovat mielivaltaisia, niin $T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv = 0$, joten $\lambda u + \mu v \in N_T$, josta väite seuraa.

(2) Olettakaamme nyt, että T on bijektio. Jos $u \in N_T$, niin $Tu = 0 = T(0)$, joten injektivisyyden nojalla $u = 0$, toisin sanoen $N_T = \{0\}$. Olkoon toisaalta $N_T = \{0\}$. Jos nyt $Tu = Tv$, niin lineaarisuuden nojalla $T(u-v) = 0$ ja näin ollen $u - v \in N_T$ ja siis $u - v = 0$. Näin ollen, T on injektio.

3 Metriset avaruudet

Metriten avaruus voidaan ymmärtää euklidisen avaruuden yleistykseenä, jossa kahden pisteen x, y välinen etäisyys $|x - y|$ korvataan ennalta annetulla mittafunktiolla, joka toteuttaa tietyt vaatimukset. Samaan tapaan kuin euklidisessa avaruudessa, voidaan tällöin määritellä raja-arvo ja jatkuvuus, joiden avulla analyysi olennaisella tavalla eroaa algebrasta. Ellei erikseen toisin mainita, tässä luvussa $\mathbb{F}$ tarkoittaa joko reaaliakselia $\mathbb{R}$ tai kompleksitasoa $\mathbb{C}$. Tuloavaruuksien $\mathbb{F}^k$ pisteille käytetään tavanomaista komponenttimerkintää $x = (x_1, \dots, x_k)$.

Määritelmä 3.1. *Metriikka* epätyhjässä joukossa X on funktio $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot jokaiselle $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, x) \geq 0$,
- (ii) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (kolmioepäyhtälö).

Tällöin paria (X, d) kutsutaan *metriseksi avaruudeksi*.

Esimerkki. Määritellään epätyhjässä joukossa X $d(x, y) = 0$, jos $x = y$ ja $d(x, y) = 1$, jos $x \neq y$. Tällöin on helppo todeta, että d on metriikka, jota kutsutaan *diskreetiksi* tai *triviaaliksi* metriikaksi.

Esimerkki. Määritellään avaruudessa $\mathbb{F}^k$ metriikka asettamalla

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^k |x_j - y_j|.$$

Tämä on myös helppo todeta metriikaksi.

Esimerkki. Tavanomaisen euklidisen metriikan määrittelemiseksi tuloavaruudessa $\mathbb{F}^k$ palautetaan mieleen Schwarzin epäyhtälö

$$\left(\sum_{j=1}^k |x_j| |y_j| \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^k |x_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^k |y_j|^2 \right).$$

Tätä soveltamalla voidaan heti todeta, että funktio $d : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{R}$, joka on määritellään asettamalla

$$d(x, y) := \left(\sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2},$$

on metriikka. Tällöin oletetaan, että neliöjuureksi valitaan positiivinen neliöjuuri, jolloin Määritelmän 3.1 ensimmäinen ehto on triviaalisti voimassa. Toinen ehto taas seuraa siitä, että $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $|x_j - y_j|^2 = 0$ jokaiselle $j = 1, \dots, k$. Mutta tämä on voimassa jos ja vain jos $x_j = y_j$ jokaiselle $j = 1, \dots, k$, toisin sanoen jos ja vain jos $x = y$. Kolmas ehto (kommutatiivisuus) seuraa tietenkin suoraan siitä, että $|x_j - y_j| = |y_j - x_j|$ jokaiselle $j = 1, \dots, k$.

Kolmioepäyhtälön toteamiseksi käytetään nyt hyväksi Schwarzin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned} d(x, z)^2 &= \sum_{j=1}^k |x_j - z_j|^2 = \sum_{j=1}^k |x_j - y_j + y_j - z_j|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^k (|x_j - y_j| + |y_j - z_j|)^2 \\ &= \sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^k |x_j - y_j| |y_j - z_j| + \sum_{j=1}^k |y_j - z_j|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^k |y_j - z_j|^2 \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^k |y_j - z_j|^2 \\ &\leq d(x, y)^2 + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)^2 \\ &= (d(x, y) + d(y, z))^2, \end{aligned}$$

josta väite seuraa ottamalla molemmin puolin neliöjuuret.

Ennen jonoihin ja funktioihin liitettäviä raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteitä määritellään lyhyesti keskeiset metriikan määrittelemät topologiset käsitteet.

Määritelmä 3.2. Metrisessä avaruudessa (X, d) mielivaltaiselle pisteelle $x \in X$ ja mielivaltaiselle realiluvulle $r > 0$ määritelty joukko

$$B(x, r) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}$$

on *avoin pallo*, jonka keskipiste on x ja säde r . Vastaavasti määritellään *suljettu pallo*

$$\overline{B(x, r)} := \{ y \in X \mid d(x, y) \leq r \}.$$

Määritelmä 3.3. Olkoon nyt (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin sanotaan, että joukko A on *avoin*, jos $A = \emptyset$ tai jos jokaista $x \in A$ vastaa $\varepsilon > 0$ siten, että $B(x, \varepsilon) \subset A$. Vastaavasti, joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos $A := X \setminus F$ on avoin joukko.

Lemma 3.4. *Metrisen avaruuden avoimet pallot ovat avoimia joukkoja.*

Todistus. Olkoon $B(a, r)$ avoin pallo ja olkoon $b \in B(a, r)$ mielivaltainen piste. Koska pallo on avoin, on $d(a, b) < r$ ja siis $s := r - d(a, b) > 0$. Jos nyt $x \in B(b, s)$, on kolmioepäyhtälön nojalla $d(a, x) = d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < s + d(a, b) = r$ ja siis $x \in B(a, r)$. Koska x on mielivaltainen, on $B(b, s) \subset B(a, r)$, josta väite seuraa.

Metrisen avaruuden avoimille joukoille voidaan nyt todistaa seuraava

Lause 3.5. *Olkoon $\mathcal{T}$ metrisen avaruuden (X, d) kaikkien avoimien joukkojen muodostama joukkokokoelma. Tällöin on voimassa:*

- (i) Tyhjä joukko $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja koko avaruus $X \in \mathcal{T}$.
- (ii) Jos $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ on mielivaltainen kokoelma avoimia joukkoja, niin $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
- (iii) Kahden avoimen joukon leikkaus on avoin joukko.

Todistus. (i) Tyhjä joukko on avoin, koska ei ole olemassa pistettä $a \in \emptyset$. Se, että koko avaruus X on avoin, on välitön seuraus avoimen joukon määritelmästä.

(ii) Olkoon nyt $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa jokin U_{α_x} siten, että $x \in U_{\alpha_x}$. Koska U_{α_x} on avoin, on olemassa avoin pallo $B(x, r)$ niin, että

$$B(x, r) \subset U_{\alpha_x} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

josta väite seuraa.

(iii) Jos U_1, U_2 ovat avoimia joukkoja ja $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, on väite triviaali. Olkoon muussa tapauksessa $x \in U_1 \cap U_2$ mielivaltainen, niin on olemassa avoimet pallot $B(x, r_1) \subset U_1$ ja $B(x, r_2) \subset U_2$. Mutta tällöin $B(x, \min(r_1, r_2)) = B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset U_1 \cap U_2$.

Huomautus. Edellisen lauseen todetaan siis, että avoimien joukkojen mielivaltainen yhdiste on avoin ja samoin (alkeellista induktiota käyttäen), että avoimien joukkojen äärelliset leikkaukset ovat avoimia. Siirtymällä komplementteihin ja käyttämällä deMorganin sääntöjä todetaan vastaavasti, että suljettujen joukkojen äärelliset yhdisteet ja mielivaltaiset leikkaukset ovat suljettuja.

Määritelmä 3.6. Olkoon A metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Tällöin voidaan määritellä:

- (i) Piste $x \in X$ on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokainen pallo $B(x, r)$ sisältää vähintään yhden joukon A pisteen $y \neq x$. Jos $x \in A$ ei ole joukon A kasaantumispiste, sanotaan, että x on joukon A *erillinen* piste. Kasaantumispisteiden joukolle käytetään merkintää A' .
- (ii) Piste $x \in A$ on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa pallo $B(x, r) \subset A$. Piste $x \in X$ on joukon A *ulkopiste*, jos on olemassa pallo $B(x, r)$ siten, että $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Piste $x \in X$ on joukon A *reunapiste*, jos jokaiselle pallolle $B(x, r)$ sisältää sekä joukon A että joukon $X \setminus A$ pisteitä (vähintään yhden).
- (iii) Joukon A sisäpisteiden joukko $\text{int } A$ on joukon A *sisäosa*.
- (iv) Joukon A *sulkeuma* $\bar{A} := A \cup A'$.

Huomautus. Voidaan todistaa, että

- (i) Joukon A *sulkeuma* $\bar{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A .
- (ii) Joukon A *sisäosa* $\text{int } A$ on suurin avoin joukko, joka sisältyy joukkoon A .

Määritelmä 3.7. Olkoon A metrisen avaruuden X osajoukko.

- (i) Joukko A on *tiheä* avaruudessa X , jos $\bar{A} = X$.
- (iv) Joukko A on *ei missään tiheä* avaruudessa X , jos $\text{int } \bar{A} = \emptyset$.

Huomautus. Sulkeuman ja sisäosan määritelmät voidaan ilmaista myös seuraavasti:

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F, F \text{ suljettu}} F$$

ja

$$\text{int } A = \bigcup_{U \subset A, U \text{ avoin}} U.$$

Varsinkin analyysissä saatetaan usein tarvita seuraavia (topologisia) käsitteitä:

Määritelmä 3.8. Olkoon A metrisen avaruuden (X, d) epätyhjä osajoukko. Joukon A halkaisija määritellään asettamalla

$$d(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Joukko A on rajoitettu, jos $d(A) < \infty$. Edelleen, pisteen x etäisyys joukosta A määritellään asettamalla

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Lemma 3.9. Jos $x, y \in X$ ja $A \subset X$ on epätyhjä osajoukko, niin

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Todistus. Jos $a \in A$ on mielivaltainen, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Ottamalla infimum pisteiden $a \in A$ suhteen saadaan

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

ja siis

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Vaihtamalla x ja y saadaan samalla tavalla epäyhtälö

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y),$$

josta väite seuraa.

Lopuksi asetetaan seuraava

Määritelmä 3.10. Olkoon (X, d) metrisen avaruus ja Y sen epätyhjä osajoukko. Määritellään $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $d_Y(x, y) := d(x, y)$ kaikille $x, y \in Y$, toisin sanoen, d_Y on kuvauksen d rajoittuma osajoukkoon $Y \times Y$. Tällöin d_Y on metriikka joukossa Y , ja sitä sanotaan metriikan d joukkoon Y indusoimaksi metriikaksi.

Jatkossa metrisen avaruuden osajoukkoja tarkasteltaessa oletetaan aina, ellei erikseen toisin mainita, että metriikka osajoukossa on alkuperäisen metriikan indusoima metriikka.

4 Metriset avaruudet II

Tässä luvussa tarkastellaan lukujonojen ja funktioiden raja-arvoja ja jatkuvuutta metrisessä avaruudessa, sekä näiden avulla määriteltäviä topologisia käsitteitä ja klassisia peruslauseita.

Aluksi todetaan, että lukujono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ metrisessä avaruudessa voidaan myös tulkita kuvauksena $s : \mathbb{N} \rightarrow X$, jolloin $x_n = s(n)$. Yleensä käytetään myös lyhyempää merkintää (x_n) , mikäli väärinkäsityksen vaaraa ei ole.

Määritelmä 4.1. Jono (x_n) metrisessä avaruudessa X suppenee kohti pistettä $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luonnollinen luku n_ε siten, että

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin merkitään $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Jonoa (x_n) sanotaan Cauchyn jonoksi, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luonnollinen luku n_ε siten, että

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

aina, kun $n, m \geq n_\varepsilon$.

Lause 4.2. Olkoon (x_n) suppeva jono metrisessä avaruudessa X . Tällöin

- (i) Jonon raja-arvo $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ on yksikäsitteinen.
- (ii) Jokainen jonon (x_n) osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa x .
- (iii) Jono (x_n) on Cauchyn jono.

Todistus. (i) Olettakaamme, että jonolle on saatu kaksi raja-arvoa x ja y . Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa kaksi luonnollista lukua n_x ja n_y siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_x$ ja vastaavasti $d(x_n, y) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_y$. Jos nyt $n \geq \max(n_x, n_y)$, on kolmioepäytälön nojalla

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Koska ε oli mielivaltainen, on välttämättä $d(x, y) = 0$ ja siis $x = y$ metriikan perusominaisuuksien nojalla.

- (ii) Tämä osa väitteestä on triviaali ja voidaan sivuuttaa.

(iii) Raja-arvon määritelmän nojalla $d(x_n, x) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Mutta jos nyt $n, m \geq n_\varepsilon$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon,$$

josta väite seuraa.

Samaan tapaan kuin lukujonoille voidaan funktion jatkuvuuden määritelmä yleistää metrisiin avaruuksiin:

Määritelmä 4.3. Olkoon $f : X \rightarrow Y$ kuvaus metriseltä avaruudelta (X, d_X) metriseen avaruuteen (Y, d_Y) .

(i) Kuvaus f on *jatkuva pisteessä* $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x) > 0$ siten, että $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ aina, kun $d_X(x, y) < \delta$, toisin sanoen aina, kun $y \in B_{d_X}(x, \delta)$.

(ii) Kuvaus f on *jatkuva metrisessä avaruudessa* X , jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

(iii) Kuvaus f on *tasaisesti jatkuva* metrisessä avaruudessa X , jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta_\varepsilon > 0$ siten, että $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ aina, kun $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$.

Huomautus. Huomaa, että tasaisen jatkuvuuden tapauksessa δ_ε on riippumaton pisteistä x, y .

Seuraava lause sitoo yhteen tietyllä tavalla kuvauksen jatkuvuuden ja jonojen suppenemisen:

Lause 4.4. *Metristen avaruuksien (X, d_X) ja (Y, d_Y) välinen kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on jatkuva pisteessä $x \in X$ jos ja vain jos jokaiselle pistejonoille (x_n) , jolle $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, vastaavien kuvapisteidien jono $(f(x_n))$ toteuttaa ehdon $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että kuvaus f on jatkuva pisteessä $x \in X$ ja valitaan $\varepsilon > 0$ mielivaltaisesti. Tällöin jatkuvuuden määritelmän nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ aina, kun $y \in B_{d_X}(x, \delta)$. Olkoon edelleen (x_n) mielivaltainen jono, jolle $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Tällöin $d_X(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Mutta tämä merkitsee sitä, että on olemassa luonnollinen luku n_δ siten, että $x_n \in B_{d_X}(x, \delta)$ aina, kun $n \geq n_\delta$. Tällöin on edellisen perusteella $d_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\delta$. Tämä puolestaan merkitsee sitä, että $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Käänteisen väitteen todistamiseksi oletetaan, että f ei ole jatkuva pisteessä $x \in X$. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ ja sitä vastaava $f(x)$ -keskinen pallo $B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ siten, että minkään pallon $B_{d_X}(x, \delta)$ kuva $f(B_{d_X}(x, \delta))$ ei (kokoonaan) sisälly palloon $B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$. Tarkastellaan nyt pallojonoa $(B_{d_X}(x, \frac{1}{n}))$. Edelliseen nojautuen muodostetaan pistejono (x_n) siten, että jokainen $x_n \in B_{d_X}(x, \frac{1}{n})$ ja jokainen $f(x_n) \notin B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$. Konstruktion perusteella on selvää, että jono (x_n) suppenee kohti pistettä x , mutta $(f(x_n))$ ei suppene (ainakaan) kohti pistettä $f(x)$. Koska tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, on kuvauksen f oltava jatkuva pisteessä x .

Määritelmä 4.5. Metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos jokainen Cauchyn jono avaruudessa (X, d) suppenee. Vastaavasti osajoukko $A \subset X$ on *täydellinen metrisessä avaruudessa* (X, d) , jos jokainen joukon A pisteiden muodostama Cauchyn jono suppenee kohti joukon A pistettä.

Lause 4.6. Jokainen euklidinen avaruus $\mathbb{F}^k$ on täydellinen.

Todistus. (i) Perusanalyysin nojalla tiedetään, että Cauchyn jonot reaaliakselilla $\mathbb{R}$ suppevat, joten $\mathbb{R}$ on täydellinen metrinen avaruus.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ja että (z_n) on kompleksilukujen muodostama Cauchyn jono. Jaetaan jonon luvut reaali- ja imaginaariosiinsa: $z_n = x_n + iy_n$. Suppenemisen nojalla jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luonnollinen luku n_ε siten, että

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{C}}(z_n, z_m) &= |z_n - z_m| = |x_n - x_m + i(y_n - y_m)| \\ &= ((x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2)^{1/2} < \varepsilon \end{aligned}$$

aina, kun $n, m \geq n_\varepsilon$ Cauchyn jonon määritelmän nojalla. Mutta tällöin on

$$(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 < \varepsilon^2.$$

Positiivisuuden nojalla on

$$(x_n - x_m)^2 < \varepsilon^2, \quad (y_n - y_m)^2 < \varepsilon^2$$

aina, kun $n, m \geq n_\varepsilon$. Mutta nyt todetaan (ottamalla neliöjuuret), että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad |y_n - y_m| < \varepsilon$$

aina, kun $n, m \geq n_\varepsilon$, mikä merkitsee sitä, että (x_n) ja (y_n) ovat Cauchyn jonoja reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Edellisen kohdan ($\mathbb{R}$ täydellinen) nojalla on olemassa

reaaliluvut x, y siten, että $d_{\mathbb{R}}(x_n, x) \rightarrow 0$ ja $d_{\mathbb{R}}(y_n, y) \rightarrow 0$, jolloin myös (z_n) suppenee kohti kompleksilukua $z = x + iy$.

(iii) Edellisten kohtien perusteella tapaus $k = 1$ on käsitelty. Tarkastellaan nyt yleistä tapausta $\mathbb{F}^k$. Olkoon (x_n) Cauchyn jono euklidisessa avaruudessa $\mathbb{F}^k$, jolloin jokainen jonon piste x_n voidaan esittää komponenttimuodossa $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$. Merkitään lyhyiden vuoksi avaruuden $\mathbb{F}^k$ metriikkaa d_k . Koska (x_n) on Cauchyn jonno, jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luonnollinen luku n_ε siten, että

$$d_k(x_n, x_m) = \left(\sum_{j=1}^k |x_{n,j} - x_{m,j}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

aina, kun $n, m \geq n_\varepsilon$. Mutta tällöin jokaiselle $j = 1, \dots, k$ todetaan, että

$$|x_{n,j} - x_{m,j}| \leq d_k(x_n, x_m) < \varepsilon$$

aina, kun $n, m \geq n_\varepsilon$. Toisin sanoen, jokaiselle $j = 1, \dots, k$ on $(x_{n,j})$ Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{F}$. Koska $\mathbb{F}$ on täydellinen, on olemassa pisteet $y_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \dots, k$ siten, että $d_{\mathbb{F}}(x_{n,j}, y_j) = 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Pisteet $y_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \dots, k$, määrittelevät nyt pisteen $y := (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{F}^k$. Tällöin selvästi

$$d_k(x_n, y) = \left(\sum_{j=1}^k |x_{n,j} - y_j|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$, toisin sanoen, Cauchyn jono (x_n) suppenee kohti pistettä $y \in \mathbb{F}^k$, ja siis $\mathbb{F}^k$ on täydellinen.

Seuraavassa tähdätään eräisiin analyysin klassisiin peruslauseisiin metrisissä avaruuksissa. Aluksi tarvitaan kuitenkin kaksi lausetta, jotka ovat lähinnä apulauseita jatkoa varten. Olkoon aluksi (x_n) pistejono metrisessä avaruudessa. Tällöin onsyitä havaita, että sama (geometrinen) piste voi toistua jonossa useamman kerran, josta johtuen jonon määräämä pistejoukko $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ voi olla äärellinen pistejoukko, vaikka jonossa sinänsä onkin numeroituvan monta elementtiä.

Lause 4.7. *Olkoon (x_n) suppeneva jono metrisessä avaruudessa X ja x olkoon kyseisen jonon raja-arvo. Jos jonon määräämässä pistejoukossa $\{x_n\}$ on äärettömän monta (erillistä) pistettä, niin raja-arvo x on pistejoukon $\{x_n\}$ kasaantumispiste.*

Todistus. Olettakaamme, että x ei ole pistejoukon $\{x_n\}$ kasaantumispiste. Tällöin on olemassa pallo $B(x, \varepsilon)$, jossa ei ole muita joukon $\{x_n\}$ pisteitä

kuin korkeintaan piste x . Mutta x on oletuksen mukaan jonon (x_n) raja-arvo, joten jonon pisteet ovat pallossa $B(x, \varepsilon)$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Mutta tällöin pistejoukossa $\{x_n\}$ on enintään äärellisen monta pistettä, nimittäin pisteen x ja jonon pisteiden $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon-1}$ määräämät erilliset pisteet. Tämä on vastoin oletusta.

Lause 4.8. *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja Y sen (metri-
nen) aliavaruus (jossa siis on metriikan d joukkoon Y indusoima metriikka). Tällöin Y on täydellinen jos ja vain jos Y on suljettu osajoukko.*

Todistus. Olettakaamme aluksi, että Y on täydellinen. Sen osoittamiseksi, että Y on suljettu joukko, olkoon $y \in X$ joukon Y kasaantumispiste. Tällöin jokainen pallo $B(y, 1/n)$ sisältää ainakin yhden joukon pisteen $y_n \neq y$. Selvästi jono (y_n) suppenee kohti pistettä y . Koska (y_n) on Cauchyn jono ja Y on täydellinen, on $y \in Y$. Mutta tällöin sulkeuma $\bar{Y} = Y \cup Y' \subset Y$, ja kun aina $Y \subset \bar{Y}$, on $Y = \bar{Y}$ ja siis Y on suljettu.

Olkoon sitten Y suljettu joukko täydellisessä avaruudessa X . Aliavaruuden Y täydellisyyden osoittamiseksi olkoon (y_n) Cauchyn jono joukossa Y . Jono (y_n) on tietenkin Cauchyn jono myös koko avaruudessa X . Koska X on täydellinen, jono (y_n) suppenee kohti jotakin pistettä $x \in X$. Jos jonon (y_n) määräämässä pistejoukossa on enintään äärellisen monta pistettä, on $y_n = x$ erästä indeksin n arvosta alkaen, joten tällöin $x \in Y$. Muussa tapauksessa Lauseen 4.7 nojalla x on jonon määräämän pistejoukon kasaantumispiste, siis myös joukon Y kasaantumispiste. Koska Y on suljettu, on $y \in Y$.

Metrisen avaruuden X osajoukkojen jonoa (A_n) sanotaan *laskevaksi* jonoksi, jos $A_1 \supset A_2 \supset \dots$.

Lause 4.9 (Cantorin leikkauslause). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja (F_n) laskeva jono epättyhjiä suljettuja osajoukkoja, joille pätee $d(F_n) \rightarrow 0$. Tällöin $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ on epättyhjä ja sisältää täsmälleen yhden pisteen.*

Todistus. Aluksi todetaan, että leikkaus F sisältää enintään yhden pisteen. Jos nimittäin F sisältää vähintään kaksi pistettä, on $d(F) > 0$, ja koska jokaiselle F_n on $d(F_n) \geq d(F) > 0$, joudutaan ristiriitaan oletuksen $d(F_n) \rightarrow 0$ kanssa.

Näin ollen, riittää todistaa, että F on epättyhjä joukko. Jokaisesta joukosta F_n valitaan piste x_n . Koska $d(F_n) \rightarrow 0$, on jono (x_n) välttämättä Cauchyn jono. Täydellisyyden perusteella jonolla (x_n) on raja-arvo $x \in X$. Nyt

osoitetaan, että $x \in F$, jolloin siis F on epätyhjä. Tätä varten osoitetaan, että $x \in F_{n_0}$ jokaiselle $n_0 \in \mathbb{N}$. Jos jonon (x_n) määräämässä pistejoukossa on enintään äärellisen monta pistettä, on $x = x_n$ erästä indeksin arvosta n alkaen, ja siis $x \in F_n$. Jonon (F_n) laskevuuden nojalla $x \in F_{n_0}$. Muussa tapauksessa jonon (x_n) määräämässä pistejoukossa on äärettömän monta pistettä ja Lauseen 4.7 nojalla x on kyseisen pistejoukon kasaantumispiste. Mutta tällöin x on joukon $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ kasaantumispiste ja siis (vielä suuremmalla syyllä) joukon F_{n_0} kasaantumispiste. Koska F_{n_0} on suljettu joukko, se sisältää kasaantumispisteensä, ja siis $x \in F_{n_0}$.

Lause 4.10 (Bairen lause). *Olko X täydellinen metrinen avaruus ja (A_n) jono ei-missään tiheitä osajoukkoja. Tällöin $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; toisin sanoen, on olemassa ainakin yksi piste, joka ei kuulu joukkojen A_n yhdisteeseen.*

Todistus. Koska A_1 on ei-missään tiheä, on $\text{int } \overline{A_1} = \emptyset$, ja siis $\overline{A_1} \neq X$. Mutta tällöin $X \setminus \overline{A_1}$ on epätyhjä avoin joukko, ja näin ollen on olemassa piste x_1 ja avoin pallo $B(x_1, \delta_1) \subset X \setminus \overline{A_1}$. Voidaan samalla olettaa, että $\delta_1 \leq 1$. Tarkastellaan nyt suljettua palloa $F_1 := \overline{B(x_1, \delta_1/2)}$ ja vastaavaa avointa palloa $B(x_1, \delta_1/2)$. Koska joukko A_2 on ei-missään tiheä, on $\text{int } \overline{A_2} = \emptyset$ ja siis $X \setminus \overline{A_2}$ epätyhjä avoin joukko. Mutta nyt on myös $B(x_1, \delta_1/2) \cap (X \setminus \overline{A_2})$ avoin ja epätyhjä. Jos nimittäin kyseinen leikkaus olisi tyhjä, niin olisi avoin pallo $B(x_1, \delta_1/2) \subset \overline{A_2}$, mikä merkitsisi sitä, että $\text{int } \overline{A_2} \neq \emptyset$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Joukosta $B(x_1, \delta_1/2) \cap (X \setminus \overline{A_2})$ voidaan nyt valita avoin pallo $B(x_2, \delta_2)$, jonka säde voidaan olettaa olevan pienempi kuin $1/2$. Olkoon nyt $F_2 := \overline{B(x_2, \delta_2/2)}$ ja $B(x_2, \delta_2/2)$ vastaava avoin pallo. Tällöin $F_2 \subset F_1$ edellisen konstruktion perusteella. Tarkastelemalla joukkoa A_3 ja toistamalla edellinen päättely konstruoidaan palloon $B(x_2, \delta_2/2)$ sisältyvä pallo $B(x_3, \delta_3) \subset X \setminus \overline{A_3}$ ja jonka säde on $\leq 1/4$. Jatketaan tarkastelemalla suljettua palloa $F_3 := \overline{B(x_3, \delta_3/2)}$.

Jatkamalla nyt edellistä päättelyä induktiivisesti konstruoidaan laskeva jono (F_n) avaruuden X suljettuja epätyhjiä osajoukkoja, joille konstruktion perusteella pätee $d(F_n) \rightarrow 0$. Koska X on täydellinen metrinen avaruus, niin Cantorin leikkauslauseen nojalla on olemassa piste $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Tällöin myös $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, \delta_n/2) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n})$. Mutta tällöin selvästi x ei kuulu joukkoon $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Lause 4.11 (Bairen lause, toinen versio). *Olko X täydellinen metrinen avaruus ja (A_n) sellainen jono sen osajoukkoja, että $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Tällöin yhden osajoukon sulkeumalla $\overline{A_n}$ on epätyhjä sisäosa.*

Todistus. Edellisen lauseen keskeinen sisältö voidaan pukea seuraavaan muotoon: Jos jokainen A_n on ei-missään tiheä, niin $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Kääntämällä tämä loogiseksi vastakohdakseen saadaan seuraava tulos: Jos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, niin ainakin yksi joukoista A_n ei ole ei-missään tiheä. Mutta tämä tarkoittaa sitä, että yhdelle joukolle A_{n_0} pätee, että $\overline{A_{n_0}} \neq \emptyset$, mikä on täsmälleen väitetty ominaisuus.

Huomautus. Bairen lauseiden tärkeyden vuoksi seuraavat termit ovat hyvin vakiintuneita: Metrinen avaruuden osajoukko on *ensimmäisen kategorian joukko*, jos se voidaan esittää ei-missään tiheiden joukkojen jonon yhdisteenä, ja muussa tapauksessa sanotaan, että osajoukko on *toisen kategorian joukko*. Edelliset lauseet voidaan näitä termejä käyttäen nyt ilmaista seuraavassa muodossa:

Lause 4.12. *Jokainen täydellinen metrinen avaruus on toisen kategorian joukko.*

Palautetaan nyt mieleen Lause 3.5, joka siis sanoo, että metrisessä avaruudessa kaikkien avoimien joukkojen kokoelma sisältää tyhjän joukon ja koko avaruuden, ja lisäksi mielivaltaisen avoimien joukkojen osakokoelman yhdiste on avoin, ja äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin. Metriikan olemassaolosta riippumatta, joukkokokoelmaa $\mathcal{T}$ epätyhjässä joukossa X , joka toteuttaa tässä sanotut ehdot, sanotaan *topologiaksi*, ja paria $(X, \mathcal{T})$ *topologiseksi avaruudeksi*. Asetetaan nyt seuraava määritelmä, jota jatkossa sovelletaan metrisessä avaruudessa.

Määritelmä 4.13. Olkoon Γ kokoelma topologisen avaruuden X (siis esimerkiksi metrinen avaruuden) osajoukkoja. Kokoelma Γ on joukon $A \subset X$ *peite*, jos $A \subset \bigcup_{K \in \Gamma} K$. Jos kokoelma Γ sisältää äärellisen, vast. numeroituvan, monta avaruuden X osajoukkoa, sanotaan, että Γ on joukon A *äärellinen*, vast. *numeroituva* peite. Jos taas kokoelma Γ sisältää ainoastaan avoimia avaruuden X osajoukkoja, sanotaan, että Γ on joukon A *avoin peite*. Lopuksi, jos $\Gamma' \subset \Gamma$ ja $A \subset \bigcup_{K' \in \Gamma'} K'$, on Γ' peitteeseen Γ sisältyvä joukon A *osapeite*.

Määritelmä 4.14. Topologisen avaruuden X osajoukko A on *kompakti*, jos joukon A jokainen avoin peite sisältää äärellisen osapeitteen. Joukko A on *relatiivikompakti*, jos sen sulkeuma $\overline{A}$ on kompakti. Jos avaruus X on kompakti, sanotaan, että X on kompakti topologinen avaruus.

Siirrytään nyt todistamaan neljä lausetta, joita voidaan sanoa tietyssä mielessä analyysin keskeisiksi lauseiksi. Yksi näistä, Cantorin leikkauslause, on edellä jo alustavassa muodossa todistettu, ks. Lause 4.9.

Lause 4.15 (Bolzano-Weierstrassin lause). *Kompaktin metrisen avaruuden jokaisella äärettömällä osajoukolla on ainakin yksi kasaantumispiste.*

Huomautus. Edellisessä “ääretön osajoukko” tarkoittaa osajoukkoa, joka sisältää äärettömän monta pistettä.

Todistus. Olettakaamme, että X on kompakti ja että $A \subset X$ on osajoukko, jolla ei ole lainkaan kasaantumispisteitä. Osoitetaan, että A on äärellinen joukko. Olkoon nyt $x \in X$ mielivaltainen piste. Vastaoletuksen mukaan x ei ole joukon A kasaantumispiste. Kasaantumispisteen määritelmän (Määritelmä 3.6) mukaan on olemassa avoin pallo $B(x)$, jolle leikkaus $B(x) \cap A$ on joko tyhjä joukko tai $\{x\}$. Kokoelma $\{B(x) \mid x \in X\}$ on selvästi avaruuden X avoin peite. Koska X on kompakti, voidaan peitteestä valita äärellinen osapeite $\{B(x_1), \dots, B(x_n)\}$. Mutta tällöin on

$$A = A \cap X \subset A \cap \bigcup_{j=1}^n B(x_j) = \bigcup_{j=1}^n A \cap B(x_j) \subset \bigcup_{j=1}^n \{x_j\} = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Lause 4.16 (Lindelöfin peitelause). *Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ jokainen avoin peite sisältää numeroituvan osapeitteen.*

Todistus. Olkoon Γ joukon A avoin peite. Tarkastellaan nyt (avoimien pallojen muodostamaa) pallokokoelmaa $\mathcal{G}$, johon luetaan mukaan kaikki sellaiset pallot

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\},$$

joille $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ ja $r \in \mathbb{Q}$. Pallokokoelma $\mathcal{G}$ on selvästi numeroituva, $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\}$. Olkoon nyt $x \in A$ mielivaltainen. Koska Γ on joukon A avoin peite, on olemassa avoin joukko $U_x \in \Gamma$ siten, että $x \in U_x$. Tällöin on olemassa (seuraavaksi todistettavan lemmän nojalla) avoin pallo $B_x \in \mathcal{G}$ siten, että $x \in B_x \subset U_x$. Itse asiassa, tällaisia palloja B_x on äärettömän monta, mutta valitaan niistä yksi, ja annetaan sille merkintä B_x . Mutta tällöin on

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset \bigcup_{x \in A} U_x,$$

joten $\{B_x \mid x \in A\}$ on joukon A avoin peite. Mutta tämä peite on numeroituva kokoelman $\mathcal{G}$ osakokoelma ja siis numeroituva. Tällöin myös kokoelma $\{U_x \mid x \in A\}$ on joukon A peite, joka on alkuperäisen peitteen Γ osapeite. Koska jokaista valittua palloa B_x vastaa täsmälleen yksi U_x , on $\{U_x \mid x \in A\}$ peitteen Γ numeroituva osapeite.

Lemma 4.17. *Olkoon $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\}$ kaikkien avaruuden $\mathbb{R}^n$ pallojen kokoelma, joiden säde ja keskipisteiden kaikki koordinaatit ovat rationaalisia. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja $x \in A$, niin on olemassa $B_x \in \mathcal{G}$ siten, että $x \in B_x \subset A$.*

Todistus. Lähdetään liikkeelle avoimesta pallosta $B(x, r) \subset A$, ja merkitään pisteen x koordinaatit $x = (x_1, \dots, x_n)$. Koordinaatit ovat tietenkin reaali-lukuja. Valitaan nyt rationaaliluvut y_k , $k = 1, \dots, n$, niin, että jokaiselle k pätee $|y_k - x_k| < \frac{r}{4n}$. Tällöin on pisteen $y = (y_1, \dots, y_n)$ etäisyys pisteestä x

$$d(y, x) = \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^n |y_k - x_k| < \frac{r}{4}.$$

Lopuksi valitaan rationaaliluku q niin, että $\frac{r}{4} < q < \frac{r}{2}$. Tällöin on $x \in B(y, q) \subset B(x, r) \subset A$ kolmioepäyhtälön perusteella. Mutta $B(y, q) \in \mathcal{G}$, joten lemma on todistettu.

Ennen seuraavan Heine-Borelin lauseen todistamista määritellään, mitä tarkoitetaan suljetulla välillä euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$:

Määritelmä 4.18. *Suljettu väli $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ on reaaliakselin suljettujen välien karteesinen tulo, ts. kun $a = (a_1, \dots, a_n)$ ja $b = (b_1, \dots, b_n)$, niin*

$$[a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j, \ j = 1, \dots, n\}.$$

Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, jos on olemassa äärellinen suljettu väli $[a, b] \supset A$.

Lemma 4.19. *Jokainen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellinen suljettu väli on kompakti.*

Todistus. Olettakaamme, että $I_1 := [a, b]$ on äärellinen suljettu väli, joka ei ole kompakti. Tällöin on olemassa välin I_1 avoin peite $\mathcal{U}$, josta ei voida poimia äärellistä osapeitettä. Jaetaan nyt I_1 2^n kappaleeseen yhteneviä suljettuja välejä komponenttivälien $[a_j, b_j]$ keskipisteiden avulla. Tällöin ainakin yksi näin saaduista äärellisistä suljetuista väleistä, olkoon se I_2 , on sellainen, että $\mathcal{U}$ on välin I_2 peite (kuten se on kaikkien muidenkin ko. välien peite) ja ei voida poimia äärellistä välin I_2 osapeitettä. Konstruktiosta seuraa, että $I_2 \subset I_1$ ja selvästi $d(I_2) = d(I_1)/2$. Jatkamalla induktiivisesti konstruoidaan laskeva jono (I_k) suljettuja välejä siten, että $d(I_k) = d(I_1)/2^{k-1} \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Mutta tällöin Cantorin leikkauslauseen (Lause 4.9) nojalla on olemassa piste

$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Valitaan nyt $U \in \mathcal{U}$ niin, että $x \in U$ ja pallo $B(x, r) \subset U$. Koska $d(I_k) \rightarrow 0$, voidaan valita k niin suureksi, että $x \in I_k \subset B(x, r) \subset U$. Mutta tällöin U yksin peittää välin I_k ja on siis äärellinen osapeite, mikä on ristiriidassa konstruktion kanssa.

Lause 4.20. *Jokainen suljettu ja rajoitettu joukko A euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on kompakti.*

Todistus. Koska A on rajoitettu, on olemassa (äärellinen) suljettu väli $[a, b] \supset A$. Olkoon nyt $\mathcal{U}$ joukon A avoin peite. Tällöin on $\mathcal{U} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$ välin $[a, b]$ avoin peite. Edellisen lauseen nojalla $[a, b]$ on kompakti, joten sen peitteestä voidaan valita äärellinen osapeite. Mutta tämä osapeite määrää peitteestä $\mathcal{U}$ äärellisen osapeitteen, joka peittää joukon A .

5 Funktiot metrisessä avaruudessa

Aiemmista analyysin kursseista tiedetään, että suljetulla (reaaliakselin) välillä määritelty reaaliarvoinen funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu ja saavuttaa maksimi- ja minimiarvonsa kyseisellä välillä. Sama tulos pätee yleisemmin jatkuville (reaaliarvoisille) funktioille metrisissä avaruuksissa:

Lause 5.1. *Olkoon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio kompaktissa metrisessä avaruudessa (X, d) . Tällöin f on rajoitettu avaruudessa X ja lisäksi on olemassa pisteet $x_s \in X, x_i \in X$ siten, että $f(x_s) = \sup f(X)$ ja $f(x_i) = \inf f(X)$.*

Todistus. (a) Aluksi todistetaan, että f on rajoitettu, toisin sanoen, että on olemassa reaaliluku b siten, että $|f(y)| \leq b$ jokaiselle $y \in X$. Olkoon nyt $x \in X$ mielivaltainen. Koska f on jatkuva, on olemassa $\delta_x > 0$ siten, että $|f(y) - f(x)| < 1$ aina, kun $y \in B_d(x, \delta_x)$. Tällöin on kolmioepäyhtälön nojalla voimassa

$$|f(y)| = |f(y) - f(x) + f(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x)| < 1 + |f(x)|.$$

Avoimien pallojen $\{B_d(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ kokoelma muodostaa avaruuden X avoimen peitteen. Koska X on kompakti, peitteestä voidaan poimia äärellinen osapeite

$$\{B_d(x_1, \delta_{x_1}), \dots, B_d(x_n, \delta_{x_n})\}.$$

Merkitään $b := \max\{1 + |f(x_1)|, \dots, 1 + |f(x_n)|\}$. Olkoon nyt $y \in X$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa $j \in \{1, \dots, n\}$ siten, että $y \in B_d(x_j, \delta_{x_j})$, ja siis $|f(y)| \leq 1 + |f(x_j)| \leq b$.

(b) Edellisen ja reaaliakselin täydellisyyden nojalla on olemassa reaaliluku $m := \sup f(X) \leq b < \infty$. Olettakaamme nyt, että $f(x) < m$ jokaiselle $x \in X$. Siirrytään tarkastelemaan funktiota $g(x) := \frac{1}{m - f(x)}$. Funktio g on jatkuva, koska $m - f(x) > 0$ jokaiselle $x \in X$. Todistuksen edellisen osan nojalla on g rajoitettu, toisin sanoen on olemassa reaaliluku $B > 0$ siten, että $|g(x)| = \frac{1}{m - f(x)} \leq B$ jokaiselle $x \in X$. Mutta tällöin on $f(x) \leq m - \frac{1}{B}$ jokaiselle $x \in X$, josta seuraa, että $\sup f(X) \leq m - \frac{1}{B} < m$, ristiriita.

(c) Infimumia koskeva väite todistetaan samalla tavalla kuin edellinen kohta.

Palautetaan nyt vielä kerran mieleen funktiojonon *pisteittäinen* ja *tasainen* suppeneminen. Ellei erikseen toisin mainita, tämän luvun funktiot ovat seuraavassa funktioita metrisestä avaruudesta X euklidiseen avaruuteen $\mathbb{F}$. Olkoon nyt (f_n) funktiojono. Tällöin sanotaan, että jono (f_n) *suppenee pisteittäin* kohti funktiota f , $f_n \rightarrow f$, jos jokaista pistettä $x \in X$ ja jokaista

$\varepsilon > 0$ vastaa $N = N(x, \varepsilon)$ siten, että $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq N$. Vastaavasti sanotaan, että funktiojono (f_n) *suppenee tasaisesti* kohti funktiota f , jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $N_0(\varepsilon)$ siten, että jokaiselle pisteelle $x \in X$ on $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq N$. Tasaisen suppenemisen määritelmä on selvästi yhtäpitävä sen kanssa, että $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Samoin on välittömästi todettavissa

Lause 5.2. *Jos jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f , niin jono suppenee kohti funktiota f myös pisteittäin. Käänteinen väite ei ole voimassa.*

Lause 5.3. *Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita metrisessä avaruudessa X . Oletetaan, että jono suppenee tasaisesti kohti funktiota f . Tällöin f on jatkuva funktio.*

Todistus. On osoitettava, että rajafunktio f on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in X$. Olkoon siis a mielivaltainen, ja olkoon $\varepsilon > 0$ samoin mielivaltainen. Jonon tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa $N = N(\varepsilon)$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

aina, kun $n \geq N$. Toisaalta, koska f_n on jatkuva pisteessä a , on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f_n(y) - f_n(a)| < \varepsilon/3$$

aina, kun $d(y, a) < \delta$. Jos nyt lisäksi $n \geq N$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|f(y) - f(a)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|,$$

mistä väite seuraa.

Seuraus 5.4. *Olkoon (f_n) jatkuvien funktioiden jono, joka suppenee pisteittäin kohti funktiota f metrisessä avaruudessa X . Jos f on epäjatkuva jossakin pisteessä $a \in X$, niin jono (f_n) ei suppene tasaisesti kohti funktiota f .*

Esimerkki. Olkoon $X = [0, 1]$ ja $f_n(t) = t^n$. Tällöin X on kompakti (koska se on suljettu ja rajoitettu), ja jokainen f_n on jatkuva. Selvästi (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota f , joka on $= 0$, kun $0 \leq t < 1$ ja $= 1$, kun $t = 1$. Koska funktio f on epäjatkuva pisteessä $t = 1$, ei jonon suppeneminen ole tasaista.

Esimerkki. Määritellään $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_n(x) := \frac{nx}{n+x} = \frac{x}{1+x/n}.$$

Tällöin $f_n(x) \rightarrow x$, kun $n \rightarrow \infty$ ja siis (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota $f(x) = x$. Sen todistamiseksi, että suppeneminen on tasaista, tarkastellaan erotusta

$$\phi(x) := |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| = \frac{x^2}{n+x}.$$

Koska $\phi'(x) = \frac{x(2n+x)}{(n+x)^3} \geq 0$, on $\phi(x)$ kasvava välillä $[0, 1]$ ja siis

$$0 \leq \phi(x) \leq \phi(1) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Näin ollen, suppeneminen on tasaista.

Esimerkki. Sen perusteella, että edelliset suppenemisen määritelmät sisältävät myös kompleksiarvoiset funktiot ja että $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^2$ voidaan samaistaa euklidisen metriikan tilanteessa, voidaan edellä sanottua soveltaa myös funktioihin ja funktiojonoihin, joiden arvojoukkona on $\mathbb{R}^2$. Esimerkkinä olkoon $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$ ja määritellään funktiot $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f_n(x, y) = \left(\frac{1+ny}{n+x}, \frac{1+nx}{n+y} \right) = \left(\frac{1/n+y}{1+x/n}, \frac{x+1/n}{1+y/n} \right).$$

Nyt on selvää, että funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa Ω kohti funktiota $f(x, y) = (y, x)$. Edelleen todetaan, että

$$f_n(x, y) - f(x, y) = \left(\frac{1-xy}{n+x}, \frac{1-xy}{n+y} \right) = (1-xy) \left(\frac{1}{n+x}, \frac{1}{n+y} \right).$$

Laskemalla euklidinen etäisyys tasossa $\mathbb{R}^2$, toisin sanoen erotuksen moduli kompleksitasossa $\mathbb{C}$, saadaan

$$\begin{aligned} |f_n(x, y) - f(x, y)|^2 &= (1-xy)^2 \left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n+y)^2} \right) \\ &\leq (1-xy)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2(1-xy)^2}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

Mutta tällöin on

$$\sup_{(x,y) \in \Omega} |f_n(x, y) - f(x, y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$, joten siis suppeneminen on tasaista.

Olkoon nyt (X, d) kompakti metrinen avaruus ja tarkastellaan jatkuvien funktioiden $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ kokoelmaa, jolle käytetään seuraavassa merkintää $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X)$, tai lyhyemmin $\mathcal{C}(X)$.

Lause 5.5. Kuvaus $d_\infty : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään asettamalla $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, on metriikka funktiojoukossa $\mathcal{C}(X)$ (ja määrittelee siis metrisen avaruuden $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$).

Todistus. Edellisen lauseen todistamisessa ainoa epätriviaali kohta on kolmioepäyhtälö. Tätä varten olkoot $f, g, h \in \mathcal{C}(X)$ ja $x \in X$ mielivaltaisia. Tällöin on

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)| \\ &= d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h). \end{aligned}$$

Mutta tällöin on

$$d_\infty(f, h) = \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h).$$

Eräs kaikkein tärkeimmistä lauseista tässä kurssissa on seuraava

Lause 5.6. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus. Jatkuvien funktioiden $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ määrittelemä metrinen avaruus $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$ on täydellinen, toisin sanoen jokainen Cauchyn jono (f_n) avaruudessa $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$ suppenee.

Todistus. Todistus jakautuu kolmeen osaan: Aluksi todetaan, että kyseinen funktiojono suppenee pisteittäin kohti funktiota $f : X \rightarrow \mathbb{F}$. Seuraavaksi osoitetaan, että suppeneminen kohti funktiota f on tasaista ja lopuksi todetaan, että rajafunktio on jatkuva.

(a) Koska (f_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$, jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luonnollinen luku $N = N(\varepsilon)$ siten, että

$$d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$$

aina, kun $n, m \geq N$. Olkoon nyt $x \in X$ mielivaltainen. Tällöin on

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon/3$$

aina, kun $n, m \geq N$. Mutta tämä merkitsee sitä, että $(f_n(x))$ on Cauchyn jono euklidisessä avaruudessa $\mathbb{F}$. Koska $\mathbb{F}$ on täydellinen ja $x \in X$ on mielivaltaisesti valittu, suppenee (f_n) pisteittäin kohti funktiota $f : X \rightarrow \mathbb{F}$.

(b) Olkoon nyt $x \in X$ mielivaltainen. Koska $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, voidaan valita $n_x > N$ siten, että $|f_{n_x}(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Jos nyt $n \geq N$, niin

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Koska tämä arvio on voimassa jokaiselle $x \in X$, on

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

aina, kun $n \geq N$, mikä osoittaa suppenemisen tasaisuuden.

(c) Rajafunktion jatkuvuus seuraa välittömästi Lauseen 5.3 perusteella.

6 Mitta-ja integrointiteoria I: ulkomitta

Tarkastellaan seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi reaaliakselin suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden joukkoa $\mathcal{C}([a, b])$. Lauseessa 5.5 määriteltiin metriikka d_∞ (*uniformi metriikka*), jonka määrittelemä metrinen avaruus $(\mathcal{C}([a, b]), d_\infty)$ on Lauseen 5.6 nojalla täydellinen. Joukossa $\mathcal{C}([a, b])$ käytetään monesti muitakin metriikkoja, eritoten integraalin avulla määriteltävinä. Kuvan antamiseksi, mistä on kysymys, voidaan aluksi tarkastella välillä $[a, b]$ annetun jatkuvan funktion f tavallista Riemannin integraalia $\int_a^b f(x)dx$. Jos nyt $1 \leq p < \infty$, niin funktio $d_p : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään lausekkeen

$$d_p(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

avulla, määrittelee metriikan joukossa $\mathcal{C}([a, b])$. Tällöin tosin kolmioepäyhtälön todistaminen on aikaisempaa työläämpää, tämä seuraa ns. Minkowskin epäyhtälöstä, johon palataan myöhemmin. Olennaista on, että näin saatu metrinen avaruus $(\mathcal{C}([a, b]), d_p)$ ei ole täydellinen. Tämä asiointi on seurausta Riemannin integraalin rajoitetusta käyttökelpoisuudesta. Monet tämän tyyppiset pulmat voidaan ratkaista korvaamalla Riemannin integraali *Lebesguen integraalilla*.

Ensi askel tähän suuntaan on määritellä *ulkomitan käsite*. Jos ajatellaan reaaliakselin rajoitetun välin $I = [a, b]$ mitta, on luonnollista sanoa, että välin pituus on sopiva välin mitta: $l(I) = b - a$. Jos nyt pyritään reaaliakselin osajoukkojen mitan määrittelyyn, ideaalitavoite voisi olla, että seuraavat ominaisuudet toteutuisivat:

- (1) Mitta $m(E)$ on määritelty jokaiselle osajoukolle $E \subset \mathbb{R}$.
- (2) Jokaiselle rajoitetulle välille $I \subset \mathbb{R}$ on voimassa $m(I) = l(I)$.
- (3) Jos (E_n) on jono erillisiä reaaliakselin joukkoja, ts. $E_n \cap E_m = \emptyset$ aina, kun $n \neq m$, niin mitta on *täydellisesti additiivinen*, ts.

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

- (4) Mitta on *siirtoinvariantti*, toisin sanoen, jos $a \in \mathbb{R}$ ja $a + E := \{a + x \mid x \in E\}$, niin $m(a + E) = m(E)$.

Voidaan kuitenkin osoittaa, että sanottuja neljää ehtoa ei voida samanaikaisesti saada toteutumaan. Olennaisesti tilanne on se, että ehdot (1) ja (3) eivät ole yhteen sopivia. On tietysti jossain määrin makuasia, kummasta halutaan luopua. Osoittautuu kuitenkin, että ehto (1) on vähemmän tärkeä, ja näin ollen sallitaan, että on olemassa reaaliakselin osajoukkoja, joiden pituutta ei voida määritellä.

Ehdot (2), (3) ja (4) toteuttavaan mittakäsitteeseen pääsemiseksi otetaan aluksi käyttöön *ulkomitan käsite*. Ulkomitalla pyritään antamaan arvio annetun joukon $A \subset \mathbb{R}$ mitalle peittämällä joukko A avoimilla väleillä ja laske-malla näiden välien pituuksien summa. Ulkomitta voidaan määritellä kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}$ seuraavasti:

Määritelmä 6.1. Joukon $A \subset \mathbb{R}$ ulkomitta $m^*(A)$ määritellään asettamalla

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \mid I_j = (a_j, b_j), j \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Huomautus. (a) Ulkomitan määrittelevien pituussummien joukko on epä-tyhjä, sillä $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (-j, j)$. Näin ollen, ulkomitta on todella määritelty kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}$.

(b) Joukon A ulkomitta on aina ei-negatiivinen, mutta se voi olla myös ääretön: $0 \leq m^*(A) \leq \infty$.

(c) Ulkomitta on monotoninen suure, toisin sanoen, jos $A \subset B \subset \mathbb{R}$, niin $m^*(A) \leq m^*(B)$. Tämän osoittamiseksi olkoon (I_j) jono avoimia välejä niin, että $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Tällöin on myös $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, ja näin ollen on

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j).$$

Käymällä nyt läpi kaikki mahdolliset tällaiset välijonot todetaan, että

$$m^*(A) \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \right\} = m^*(B).$$

Ulkomitan määritelmän järkevyyttä edellyttää, että tarkastellaan edellä esitettyjen ominaisuuksien (2), (3) ja (4) voimassa oloa ulkomitan suhteen. Aluksi todistetaan

Lause 6.2. *Reaalilukuvälin ulkomitta on sama kuin välin (euklidinen) pituus.*

Todistus. (a) Olkoon $I = [a, b]$ aluksi suljettu ja rajoitettu väli. Jos nyt $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin $I \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Mutta tällöin ulkomitan määritelmään perustuen

$$m^*(I) \leq l(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = b - a + 2\varepsilon.$$

Koska ε on mielivaltainen, on näin ollen $m^*(I) \leq b - a = l(I)$.

Käänteisen epäyhtälön todistamiseksi olkoon (I_n) jono avoimia välejä, jotka peittävät välin I , ts. $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. (Huomaa, että Lindelöfin peitelauseen (Lause 4.16) nojalla voidaan aina olettaa, että välin I peite on numeroituva.) Koska I on kompakti (Lause 4.20), äärellisen moni yo. väleistä peittää välin I , ts. on olemassa $I_{n_1}, \dots, I_{n_k}$ siten, että

$$I \subset \bigcup_{j=1}^k I_{n_j}.$$

Koska väli I on suljettu, on $a \in I$, ja siis $a \in I_1 = (a_1, b_1)$, missä I_1 on jokin ylläpoimituista äärellisen monesta välistä. Jos nyt $b_1 \leq b$, niin $b_1 \in I_2 = (a_2, b_2)$, missä I_2 on taas jokin ylläpoimituista äärellisen monesta välistä. Jatketaan niin kauan, kunnes jollekin arvolle $s \leq k$ pätee $b_s > b$. Näin tapahtuu, koska mainitut äärellisen monta väliä peittävät koko alkuperäisen välin I . Tällöin on saatu välit $(a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s)$, joille konstruktion nojalla on voimassa $a_{n+1} < b_n < b_{n+1}$. Mutta tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) &\geq \sum_{j=1}^s l(I_j) = b_s - a_s + \dots + b_1 - a_1 \\ &= b_s + (b_{s-1} - a_s) + \dots + (b_1 - a_2) - a_1. \end{aligned}$$

Mutta $b_{j-1} > a_j$ jokaiselle j . Näin ollen,

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \geq b_s - a_1 > b - a = l([a, b]),$$

sillä $b_s > b$ ja $a_1 < a$. Koska edellä tarkasteltu välin I (numeroituva) peite voidaan valita mielivaltaisesti, on ulkomitan määritelmän nojalla näin ollen voimassa $m^*(I) \geq b - a = l([a, b])$.

(b) Olettakaamme seuraavaksi, että väli I on rajoitettu, mutta ei suljettu, ts. avoin tai puoliavoin. Tarkastellaan nyt suljettua väliä $[a, b] = [\inf I, \sup I]$, jolloin tietenkin $I \subset [a, b]$. Ulkomitan monotonisuuden nojalla on

$$m^*(I) \leq m^*([a, b]) = b - a.$$

Käänteisen epäyhtälön todistamiseksi valitaan $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, jolloin $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset I$. Mutta tällöin on

$$m^*(I) \geq m^*([a + \varepsilon, b - \varepsilon]) = b - a - 2\varepsilon.$$

Koska ε valittiin edellä sanotulla tavalla mielivaltaisesti, on $m^*(I) \geq b - a$, ja siis $m^*(I) = b - a$.

(c) Jos väli I ei ole rajoitettu, on $l(I) = \infty$. Olkoon nyt $a \in I$. Tällöin on joko $a + n \in I$ tai $a - n \in I$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Ulkomitan monotonisuuden nojalla on

$$m^*(I) \geq m^*([a, a + n]) = l([a, a + n]) = n$$

tai

$$m^*(I) \geq m^*([a - n, a]) = l([a - n, a]) = n$$

jokaiselle luonnolliselle luvulle n . Mutta tällöin on välttämättä $m^*(I) = \infty$.

Mitä tulee additiivisyyteen (ominaisuus (3)), ulkomitta ei tässä suhteessa ole riittävän toimiva, ja ainoastaan seuraava *subadditiivisyys* on mahdollista todistaa:

Lause 6.3. *Olkoon (E_j) jono reaaliakselin osajoukkoja. Tällöin*

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j).$$

Todistus. Jos jollekin j on $m^*(E_j) = \infty$, on väite triviaali. Näin ollen, voidaan olettaa, että jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ on $m^*(E_j) < \infty$. Ulkomitan määritelmän nojalla voidaan valita jokaiselle osajoukolle E_j (numeroituva) peite avoimia välejä, $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j_k}$ niin, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{j_k}) < m^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Laskemalla yhteen saadaan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l(I_{j_k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j) + \varepsilon.$$

Mutta $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}$, joten

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l(I_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j) + \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, seuraa väite suoraan edellisestä epäyhtälöstä.

Seuraus 6.4. *Reaaliakselin numeroituvan osajoukon A ulkomitta $m^*(A) = 0$. Vastaavasti, jokainen (aito) reaalilukuväli on ylinumeroituva.*

Lause 6.5. *Ulkomitta on siirtainvariantti.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan aluksi joukkoja A ja $a + A$. Jos välijono (I_j) muodostaa joukon A avoimen peitteen, niin selvästi välijono $(a + I_j)$ peittää välin $a + A$. Lisäksi on jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ välin pituus siirtainvariantti, ts. $l(I_j) = l(a + I_j)$. Ulkomitan määritelmän nojalla on

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A \right\} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(a + I_j) \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} (a + I_j) \supset a + A \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(\tilde{I}_j) \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{I}_j \supset a + A \right\} = m^*(a + A). \end{aligned}$$

Edellä viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että epäyhtälömerkin jälkeisessä välipeitekokoelmassa ovat mukana kaikki joukon $a + A$ numeroituvat avoimet välipeitteet, kun taas kokoelma ennen epäyhtälömerkkiä sisältää (teoriassa) vain osan joukon $a + A$ mahdollisista numeroituvista avoimista välipeitteistä. Saman epäyhtälön avulla todetaan heti, että

$$m^*(a + A) \geq m^*(-a + (a + A)) = m^*(A),$$

josta väite seuraa.

7 Mitta-ja integrointiteoria II: mitta, mitalliset joukot ja mitalliset funktiot

Edellisen luvun alussa tavoitteeksi asetettiin *mitan* konstruointi reaaliakselilla $\mathbb{R}$ niin, että ominaisuudet (2), (3) ja (4) sivulla 31 olisivat voimassa. Ulkomitalle m^* todettiin, että ominaisuus (2) on voimassa (Lause 6.2), ja samoin ominaisuus (4) (Lause 6.5). Sitävastoin ominaisuus (3) jäi sikäli vajaaksi, että yhtäsuuruuden sijaan voitiin todistaa ainoastaan epäyhtälö (subadditiivisyys). Ulkomitta m^* oli lisäksi määritelty kaikille reaaliakselin $\mathbb{R}$ osajoukoille (Määritelmä 6.1). Nyt asetetaan ulkomitalle lisävaatimus, jonka seurauksena ominaisuus (3) toteutuu, mutta sen hintana ominaisuudesta (1) joudutaan luopumaan. Lisävaatimus voi olla vaikeasti hahmotettavissa, ellei ensin huomata määritelmän perusidea: Tarkasteltavan joukon on oltava sellainen, että se jakaa minkä hyvänsä muun joukon kahteen osaan additiivisesti ulkomitan suhteen.

Määritelmä 7.1. Joukko $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, jos jokaiselle joukolle $A \subset \mathbb{R}$ on voimassa

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Mitallisten joukkojen kokoelmalle käytetään merkintää $\mathcal{M}$. Mitallisen joukon E mitta määritellään yksinkertaisesti samaksi kuin kyseisen joukon ulkomitta: $m(E) := m^*(E)$. Se, että myös ei-mitallisia joukkoja on olemassa, on epätriviaalia, mutta kuitenkin todistettavissa. Vielä on syytä huomauttaa, että ulkomitan subadditiivisuuden nojalla joukko E on mitallinen, jos ja vain jos jokaiselle $A \subset \mathbb{R}$ on voimassa

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Koska tämä epäyhtälö on triviaalisti voimassa, jos $m^*(A) = \infty$, riittää vielä sen osoittaminen joukoille A , joille $m^*(A) < \infty$.

Ominaisuuksien (2), (3) ja (4) todistamiseksi joudutaan osoittamaan joukko mitallisuutta ja mittaa koskevia tuloksia, joista useimmat ovat sinänsä tärkeitä.

Lemma 7.2. *Mitallisen joukon $E \subset \mathbb{R}$ komplementti $\mathbb{R} \setminus E$ on myös mitallinen.*

Todistus. Oletuksen nojalla jokaiselle joukolle $A \subset \mathbb{R}$ on voimassa

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Koska $A \cap (\mathbb{R} \setminus E) = A \setminus E$ ja $A \setminus (\mathbb{R} \setminus E) = A \cap E$, saadaan välittömästi

$$m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E)) + m^*(A \setminus (\mathbb{R} \setminus E)) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E) = m^*(A),$$

josta väite seuraa. $\square$

Lemma 7.3. *Jos joukon $E \subset \mathbb{R}$ ulkomitta $m^*(E) = 0$, niin joukko E on mitallinen ja siis $m(E) = 0$.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen. Koska $A \setminus E \subset A$, on $m^*(A) \geq m^*(A \setminus E)$. Toisaalta on $0 \leq m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$, ja siis

$$m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E),$$

joten E on mitallinen mitallisuuden määritelmään liittyvän huomautuksen perusteella. $\square$

Seuraus 7.4. *Numeroituvat joukot ovat mitallisia ja nollamittaisia.*

Todistus. Väite on suora seuraus edellisestä lemmasta ja Seurauksesta 6.4.

Lemma 7.5. *Joe joukko E mitallinen, ja $a \in \mathbb{R}$, niin myös $E + a$ on mitallinen ja $m(E) = m(E + a)$, toisin sanoen, mitta on siirtoinvariantti.*

Todistus. Lauseen 6.5 ja yksinkertaisen joukko-opin perusteella todetaan, että jokaiselle joukolle $A \subset \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} m^*(A \setminus (E + a)) + m^*(A \cap (E + a)) \\ &= m^*(((-a + A) + a) \setminus (E + a)) + m^*(((-a + A) + a) \cap (E + a)) \\ &= m^*(((-a + A) \setminus E) + a) + m^*(((-a + A) \cap E) + a) = m^*(-a + A) \\ &= m^*(A), \end{aligned}$$

joten $E + a$ on mitallinen joukko.

Lemma 7.6. *Jokainen rajoitettu avoin väli (a, b) on mitallinen joukko.*

Todistus. Olkoon nyt $A \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen ja merkitään $A_1 := A \setminus (a, b)$, $A_2 := A \cap (a, b)$. Mitallisuuden määritelmän perusteella riittää osoittaa, että $m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2)$ jokaiselle joukolle A , jolle $m^*(A) < \infty$. Koska A_1 ja A_2 ovat joukon A osajoukkoja, myös näillä on äärellinen ulkomitta.

Ulkomitan määritelmän perusteella on olemassa joukon A numeroituva avoin välipeite (I_j) siten, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Merkitään nyt $I'_j := I_j \setminus (a, b)$ ja $I''_j := I_j \cap (a, b)$. Nämä ovat silloin joko välejä tai kahden välin yhdisteitä, ja koska Lauseen 6.2 nojalla välin ulkomitta on sama kuin välin pituus, on jokaiselle $j \in \mathbb{N}$

$$l(I_j) = l(I'_j) + l(I''_j) = m^*(I'_j) + m^*(I''_j).$$

Mutta tällöin on

$$\begin{aligned} m^*(A_1) + m^*(A_2) &\leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I'_j\right) + m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I''_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I'_j) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I''_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(I'_j) + m^*(I''_j)) \leq m^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ voidaan valita mielivaltaisesti, on haettu epäyhtälö voimassa, ja siis väli (a, b) mitallinen.

Lemma 7.7. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ annettu ja olkoot $E_1, \dots, E_n$ joukko erillisiä mitallisia joukkoja reaaliakselilla. Tällöin on*

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right)\right) = \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_j).$$

Todistus. Tässä voidaan käyttää induktiotodistusta. Lähtötapaus $n = 1$ on triviaalisti voimassa, joten voidaan olettaa, että väite on voimassa erillisille joukoille $E_1, \dots, E_{n-1}$.

Nyt todetaan aluksi, että joukkojen E_j erillisyyden nojalla on

$$E_n \cap \bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{j=1}^n (E_n \cap E_j) = E_n,$$

joten

$$A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \cap E_n = A \cap E_n.$$

Samaan tapaan todetaan, että

$$A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \setminus E_n = A \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j.$$

Valitsemalla nyt $A \cap \bigcup_{j=1}^n E_j$ joukon E_n mitallisuusehdossa käytettäväksi testijoukoksi, todetaan Määritelmän 7.1 nojalla, että

$$\begin{aligned} m^* \left(A \cap \bigcup_{j=1}^n E_j \right) &= m^*(A \cap E_n) + m^* \left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right) \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{j=1}^{n-1} m^*(A \cap E_j), \end{aligned}$$

missä viimeiseen yhtäsuuruuteen on käytetty induktio-oletusta.

Lause 7.8. *Olkoon (E_j) jono mitallisia joukkoja reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Tällöin ovat myös $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ja $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ mitallisia ja lisäksi*

$$m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Jos lisäksi kaikki joukot E_j ovat keskenään erillisiä, on

$$m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Todistus. Todistus on kokonaisuudessaan suhteellisen pitkä, ja sivuutetaan tässä yhteydessä osittain, ks. Royden: Real Analysis. Olettakaamme, että yhdisteiden ja leikkausten mitallisuus on saatu todistetuksi. Toinen väite, subadditiivisuus, on tällöin sama kuin Lause 6.3.

Olko nyt mitalliset joukot E_j (parittain) erillisiä. Valitsemalla Lemmassa 7.7 $A = \mathbb{R}$ todetaan, että

$$m \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) = \sum_{j=1}^n m(E_j)$$

jokaiselle luonnolliselle luvulle n . Toisaalta on $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset \bigcup_{j=1}^n E_j$ jokaiselle n , joten on myös

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq m\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) = \sum_{j=1}^n m(E_j)$$

jokaiselle n . Koska edellisen epäyhtälön vasen puoli on riippumaton luvusta n , on

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Käänteinen epäyhtälö seuraa lauseen toisesta väitteestä, ts. Lauseesta 6.3.

Seuraus 7.9. *Kaikki reaaliakselin välit ovat mitallisia, ja niiden mitta on sama kuin välin euklidinen pituus.*

Seuraavaksi lähdetään tarkastelemaan *mitallisen funktion* käsitettä. Tätä varten palautetaan mieleen mitallisten joukkojen ($\subset \mathbb{R}$) kokoelmalle annettu merkintä $\mathcal{M}$. Lisäksi merkitään $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Määritelmä 7.10. Mitallisessa joukossa $E \in \mathcal{M}$ määritelty funktio $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ on mitallinen, jos joukko $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Joskus käytetty, kätevä tapa erottaa tyyppiä $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ oleva funktio tyyppiä $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olevasta funktiosta on sanoa, että edellinen on *reaali(arvo)nen* ja jälkimmäinen *numeerinen* funktio.

Huomautus. Tässä yhteydessä on syytä huomauttaa siitä, että funktio f on topologisen määritelmän mukaan jatkuva määrittelyjoukossaan E , jonka tulee tietenkin olla topologialla varustettu, jos joukko $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ on avoin jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Merkintöjen lyhentämiseksi joukolle $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ käytetään seuraavassa tiiviimpää merkintää $[f > \alpha]$, ja samoin vastaavia muita merkintöjä.

Lause 7.11. *Olko $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ annettu funktio mitallisessa joukossa E . Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

(a) *f on mitallinen funktio,*

(b) $[f \geq \alpha] \in \mathcal{M}$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$,

(c) $[f < \alpha] \in \mathcal{M}$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$,

(d) $[f \leq \alpha] \in \mathcal{M}$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Todistus. Todistetaan lause päättelyketjulla $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Aluksi todetaan, että

$$[f \geq \alpha] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f > \alpha - \frac{1}{n}],$$

jonka tarkka todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Oletuksen (a) nojalla joukko $[f > \alpha - \frac{1}{n}] \in \mathcal{M}$ jokaiselle luonnolliselle luvulle n . Lauseen 7.7 nojalla on joukko $\bigcap_{n=1}^{\infty} [f > \alpha - \frac{1}{n}] \in \mathcal{M}$ ja näin ollen myös joukko $[f \geq \alpha]$ on mitallinen.

$(b) \Rightarrow (c)$: Heti todetaan, että $[f < \alpha] = E \setminus [f \geq \alpha] = E \cap (\mathbb{R} \setminus [f \geq \alpha])$. Tämän nojalla, käyttäen Lemmaa 7.2 ja Lausetta 7.7 todetaan heti, että $[f < \alpha] \in \mathcal{M}$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Samoin kuin todistuksen ensimmäisessä osassa todetaan, että

$$[f \leq \alpha] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f < \alpha + \frac{1}{n}].$$

Lauseen 7.7. nojalla $\bigcap_{n=1}^{\infty} [f < \alpha + \frac{1}{n}] \in \mathcal{M}$ jokaiselle luonnolliselle luvulle n , ja näin ollen ehto (d) seuraa ehdosta (c).

$(d) \Rightarrow (a)$: Nyt todetaan, että $[f > \alpha] = E \setminus [f \leq \alpha]$. Väite seuraa nyt Lemma 7.2 ja Lauseen 7.7 nojalla samoin kuin kohdassa $(b) \Rightarrow (c)$.

Esimerkki. Jokainen vakiofunktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \{a\}$, missä $a \in \mathbb{R}$ on mitallinen funktio. Ensinnäkin määrittelyjoukko $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ on mitallinen joukko. Edelleen $[f > \alpha] = \emptyset$ aina, kun $\alpha > a$ ja $[f > \alpha] = \mathbb{R}$ aina, kun $\alpha \leq a$. Mutta sekä $\mathbb{R}$ että $\emptyset$ ovat mitallisia joukkoja.

Esimerkki. Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, joka määritellään niin, että $f(x) = 0$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 1$, kun $x \notin \mathbb{Q}$, on mitallinen funktio. Heti todetaan, että $[f > \alpha]$ on joko $\emptyset$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tai $\mathbb{R}$ riippuen reaaliluvun α arvosta. Mutta $\emptyset$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ ja siis myös $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ovat mitallisia joukkoja.

Lause 7.12. Olkoot $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mitallisia funktioita ja olkoon $c \in \mathbb{R}$ annettu. Tällöin funktiot $f + c$, cf , $f + g$ ja fg ovat mitallisia ja samoin $1/f$, mikäli $f(x) \neq 0$ jokaiselle $x \in E$.

Todistus. (1) Selvästi on $[f + c > \alpha] = [f > \alpha - c] \in \mathcal{M}$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ funktion f mitallisuuden nojalla.

(2) Funktion cf mitallisuuden todistamiseksi todetaan aluksi, että cf on vakiofunktio $\equiv 0$ ja siis mitallinen äskeisen esimerkin perusteella, jos $c = 0$. Voidaan siis olettaa, että $c \neq 0$. Lauseen 7.11 avulla nähdään heti, että $-f$ on mitallinen aina, kun f on mitallinen. Voidaan näin ollen edelleen olettaa, että $c > 0$. Mutta tällöin $[cf > \alpha] = [f > \frac{\alpha}{c}] \in \mathcal{M}$ jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ funktion f mitallisuuden nojalla.

(3) Summan käsittelemiseksi olkoon $f(x) + g(x) < \alpha$, jolloin $f(x) < \alpha - g(x)$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaaliakselilla, on olemassa rationaaliluku r siten, että $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Tällöin on helppo todistaa, että

$$[f + g < \alpha] = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} ([f < r] \cap [g < \alpha - r]).$$

Mutta joukot $[f < r]$ ja $[g < \alpha - r]$ ovat mitallisia ja koska rationaalilukujen joukko on numeroituva, on $[f + g < \alpha]$ mitallinen Lauseen 7.8 nojalla.

(4) Tulon tapauksessa todetaan aluksi, että f^2 on mitallinen. Tämä seuraa siitä, että $[f^2 > \alpha] = [f > \sqrt{\alpha}] \cup [f < -\sqrt{\alpha}]$, jos $\alpha \geq 0$ ja $[f^2 > \alpha] = E$, jos $\alpha < 0$. Mutta tällöin tulon fg mitallisuus seuraa identiteetistä $fg = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$.

(5) Koska $f(x) \neq 0$ jokaiselle $x \in E$, on

$$[\frac{1}{f} > \alpha] = ([1 > \alpha f] \cap [f > 0]) \cup ([1 < \alpha f] \cap [f < 0]),$$

josta funktion $\frac{1}{f}$ mitallisuus suoraan seuraa.

Huomautus. Edellisessä lauseessa rajoituttiin tarkastelemaan vain reaaliarvoisia funktioita, sillä funktion arvojen $\pm\infty$ ollessa mahdollisia voi tieteenkin tapahtua, että $f + g$ tai fg ei ole määritelty. Jos kuitenkin tiedetään, että näin tapahtuu enintään nollamittaisessa joukossa, tilanne pysyy hallinnassa esimerkiksi niin, että summa, vast. tulo, määritellään tällöin mielivaltaisesti. Tätä varten tarvitaan seuraava määritelmä ja lause.

Määritelmä 7.13. Annettu ominaisuus pätee melkein kaikkialla (m.k./a.e./f.ü./p.p.), jos se joukko, jossa kyseinen ominaisuus ei ole voimassa, on nollamittainen.

Esimerkki. Jos $f = g$ m.k. (joukossa $E \subset \mathbb{R}$, niin $[f \neq g]$ on nollamittainen joukko.

Lause 7.14. Jos funktio $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ on mitallinen ja funktiolle $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pätee, että $f = g$ m.k. määrittelyalueessa E , niin myös g on mitallinen joukossa E .

Todistus. Merkitään $A := [f \neq g] \subset E$. Oletuksen nojalla $m(A) = 0$. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Tällöin

$$[g > \alpha] = ([f > \alpha] \cup (A \cap [g > \alpha]) \setminus (A \cap [g \leq \alpha])).$$

Mutta oikealla olevat joukot ovat kaikki mitallisia, ensimmäinen funktion f mitallisuuden nojalla ja seuraavat nollamittaisen joukon osajoukkoina (Lemma 7.3).

Huomautus. Edellisen lauseen perusteella voidaan myös tarkastella funktioiden $f + g$ ja fg mitallisuutta, kun $f : \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g : \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin on vain edellytettävä, että joukot $[f = \pm\infty]$ ja $[g = \pm\infty]$ ovat nollamittaisia.

Seuraavan lauseen ymmärtämiseksi palautetaan mieleen ylä- ja alaraja-arvon käsitteet:

Määritelmä 7.15. Olkoon (f_n) annettu funktiojono, missä jokaiselle luonnolliselle luvulle n on $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin jonon yläraja-arvo $\limsup_n f_n$, vast. alaraja-arvo $\liminf_n f_n$, määritellään asettamalla jokaiselle $x \in E$

$$\limsup_n f_n(x) := \inf_n \sup_{k \geq n} f_k(x),$$

vast.

$$\liminf_n f_n(x) := \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Lause 7.16. Olkoon (f_n) jono mitallisia laajennetusti reaaliarvoisia funktioita (mitallisessa) joukossa E . Tällöin myös funktiot $\sup\{f_1, \dots, f_n\}$, $\inf\{f_1, \dots, f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ ja $\liminf_n f_n$ ovat mitallisia.

Todistus. Jos aluksi määritellään h asettamalla $h(x) := \sup\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, todetaan, että jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ on $[h > \alpha] = \bigcup_{j=1}^n [f_j > \alpha]$. Koska jokainen f_j on mitallinen, on jokainen $[f_j > \alpha]$ mitallinen joukko ja näin ollen on $[h > \alpha]$ mitallinen Lauseen 7.7 perusteella.

Funktion $\sup_n f_n$ mitallisuus todetaan vastaavalla tavalla huomaamalla, että funktiolle $g(x) := \sup_n f_n(x)$ on $[g > \alpha] = \bigcup_{j=1}^\infty [f_j > \alpha]$ ja käyttämällä Lauseen 7.7 asemesta Lausetta 7.8.

Kahta edellistä kohtaa vastaavat tulokset alarajan tapauksessa todistetaan vastaavalla tavalla.

Funktion $\limsup_n f_n$ mitallisuus seuraa nyt suoraan yläraja-arvon määritelmästä yhdistämällä tarvittavat kohdat tämän lauseen aiemmin todistetusta osasta. Sama koskee ala-raja-arvoa $\liminf_n f_n$.

Huomautus. Jos raja-arvo $\lim_n f_n$ on olemassa, niin se on mitallinen, sillä $\lim_n f_n = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$.

Tämän luvun päätteeksi, valmistuksena seuraavan luvun integraalikäsitteeseen, määritellään joukon karakteristisen funktion käsite sekä perusfunktion käsite.

Määritelmä 7.17. Joukon $E \subset \mathbb{R}$ karakteristinen funktio $\chi_E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $\chi_E(x) = 1$, kun $x \in E$ ja $\chi_E(x) = 0$, kun $x \notin E$.

Lemma 7.18. *Joukko $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen jos ja vain jos sen karakteristinen funktio χ_E on mitallinen funktio.*

Todistus. Olkoon aluksi χ_E mitallinen funktio. Tällöin on $[\chi_E > 0] = E$ mitallinen joukko.

Olettakaamme sitten, että E on mitallinen joukko ja olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Tällöin on $[\chi_E > \alpha] = \mathbb{R}$, jos $\alpha < 0$. Edelleen $[\chi_E > \alpha] = E$, jos $0 \leq \alpha < 1$ ja $[\chi_E > \alpha] = \emptyset$, kun $\alpha \geq 1$.

Määritelmä 7.19. Reaaliarvoinen funktio $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ joukossa $E \subset \mathbb{R}$ on *perusfunktio*, (*simple function*), jos se on mitallinen ja sen arvojoukko $\phi(E)$ koostuu äärellisen monesta reaaliluvusta.

Huomautus. Jos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on perusfunktio ja $\phi(\mathbb{R}) = \{a_1, \dots, a_n\}$, on selvää, että joukot $E_j := [\phi = a_j]$ ovat erillisiä ja niiden yhdiste on $\mathbb{R}$. Tällöin voidaan edelleen perusfunktio ϕ esittää muodossa

$$\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}.$$

Määritelmä 7.20. Suljetulle välille $[a, b] \subset \mathbb{R}$ rajoitettua perusfunktiota sanotaan porraskunktioksi.

Lause 7.21. *Olkoon $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ei-negatiivinen mitallinen funktio. Tällöin on olemassa kasvava jono (ϕ_n) perusfunktioita siten, että $f = \lim_n \phi_n = \sup_n \phi_n$.*

Todistus. Sivutetaan tässä yhteydessä.

8 Mitta- ja integrointiteoria III: Lebesguen integraali

Lebesguen integraali konstruoidaan tässä yhteydessä määrittelemällä integraali aluksi perusfunktioille (Määritelmä 7.19) ja yleistämällä sitten integraali yleisemmille funktioille. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan tarkastelemaan reaaliakselin (mitallisissa) osajoukoissa määriteltyjä numeerisia funktioita. Mitta- ja integrointiteoriassa osoittautuu järkeväksi sopia äärettömyyden käsittelemisestä laskuissa seuraavalla tavalla (näissä sopimuksissa $x \in \mathbb{R}$):

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad x \pm \infty = \pm\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0, \quad x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0, \quad x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0.$$

Määritelmä 8.1. Oletetaan, että $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ja että $E_1, \dots, E_n$ ovat erillisiä reaaliakselin $\mathbb{R}$ mitallisia osajoukkoja. Olkoon edelleen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ perusfunktio, jolla on esitys

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x).$$

Perusfunktion ϕ integraali (yli reaaliakselin $\mathbb{R}$) määritellään lausekkeena

$$\int \phi \, dm := \sum_{j=1}^n a_j m(E_j)$$

edellyttäen, että kyseinen summa on määritelty. Lisäksi sanotaan, että perusfunktio ϕ on integroitava, mikäli $\int \phi \, dm$ on määritelty ja äärellinen.

Edellä annetun integraalikäsitteen yleistys muihin kuin perusfunktioihin on nyt helposti toteutettavissa:

Määritelmä 8.2. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ mitallinen funktio. Tällöin määritellään

$$\int f \, dm = \sup \left\{ \int \phi \, dm \mid \phi \text{ perusfunktio ja } \phi \leq f \right\}.$$

Huomautus. Palauttamalla mieleen Lause 7.21 voidaan edellinen lause ilmaista seuraavassa muodossa:

$$\int f \, dm = \int (\sup \phi) \, dm = \sup \left\{ \int \phi \, dm \right\}.$$

Käyttämällä edelleen demotehtävissä 7 olleita määritelmiä

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0)$$

integraalikäsite voidaan edelleen yleistää mielivaltaisiin mitallisiin numeerisiin funktioihin:

Määritelmä 8.3. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Tällöin määritellään

$$\int f \, dm := \int f^+ \, dm - \int f^- \, dm$$

edellyttäen, että erotus on määritelty. Edelleen sanotaan, että mitallinen numeerinen funktio f on integroituva, jos $\int f \, dm$ on määritelty ja äärellinen.

Lopuksi asetetaan

Määritelmä 8.4. Mitallisen numeerisen funktion f integraali mitallisessa joukossa $E \subset \mathbb{R}$ määritellään asettamalla

$$\int_E f \, dm := \int f \chi_E \, dm.$$

Nyt voidaan helposti todistaa joukko Lebesguen integraalin yksinkertaisia perusominaisuuksia:

Lause 8.5. *Olkoot $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mitallisia funktioita ja $\alpha \in \mathbb{R}$ olkoon annettu vakio. Tällöin pätee:*

(a) *Jos $\int f \, dm$ on määritelty, niin*

$$\int \alpha f \, dm = \alpha \int f \, dm.$$

(b) *Jos $f \geq g$, ja jos $\int g \, dm$ on määritelty ja $> -\infty$, niin myös $\int f \, dm$ on määritelty ja*

$$\int f \, dm \geq \int g \, dm.$$

(c) *Jos $f \geq g$, ja jos $\int f \, dm$ on määritelty ja $< \infty$, niin myös $\int g \, dm$ on määritelty ja*

$$\int f \, dm \geq \int g \, dm.$$

(d) Jos $\int f dm$ on määritelty, niin

$$\left| \int f dm \right| \leq \int |f| dm.$$

(e) Olkoon $f \geq 0$ ja E mitallinen joukko. Tällöin

$$\int_E f dm = \sup \left\{ \int_E \phi dm \mid \phi \text{ perusfunktio ja } \phi \leq f \right\}.$$

(f) Jos $\int f dm$ on määritelty ja E on mitallinen, niin $\int_E f dm$ on myös määritelty.

Todistus. (a) Jos $\alpha = 0$, on väite lähes triviaali: Ensiksi, $\alpha \int f dm = 0$ riipumatta siitä, onko $\int f dm = \infty$ tai äärellinen, ks. sopimukset sivulla 46. Toisaalta, $0 \cdot f$ häviää identtisesti. Mutta vakiofunktio on aina mitallinen, ja siis perusfunktio Määritelmän 7.19 nojalla. Määritelmän 8.1 nojalla $\int 0 \cdot f dm = \int 0 dm = 0 \cdot m(\mathbb{R}) = 0 \cdot \infty = 0$.

Voidaan siis olettaa, että $\alpha \neq 0$. Jos $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x)$ on perusfunktio, niin

$$\alpha \int f dm = \alpha \sum_{j=1}^n a_j m(E_j) = \sum_{j=1}^n \alpha a_j m(E_j) = \int \alpha f dm.$$

Oletetaan nyt, että $f \geq 0$ ja $\alpha > 0$. Olkoon edelleen ϕ perusfunktio ja $\phi \leq \alpha f$. Tällöin on ϕ/α myös perusfunktio ja $\phi/\alpha \leq f$. Sama pätee selvästi myös kääntäen. Mutta tällöin (seuraavassa ϕ, ψ ovat aina yksinkertaisia funktioita):

$$\begin{aligned} \alpha \int f dm &= \alpha \sup \left\{ \int \phi dm \mid \phi \leq f \right\} = \sup \left\{ \alpha \int \phi dm \mid \phi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \alpha \phi dm \mid \alpha \phi \leq \alpha f \right\} \leq \sup \left\{ \int \psi dm \mid \psi \leq \alpha f \right\} = \int \alpha f dm. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\int \alpha f dm = \sup \left\{ \int \phi dm \mid \phi \leq \alpha f \right\} = \sup \left\{ \int \alpha \frac{\phi}{\alpha} dm \mid \frac{\phi}{\alpha} \leq f \right\}$$

$$= \alpha \sup\left\{\int \frac{\phi}{\alpha} dm \mid \frac{\phi}{\alpha} \leq f\right\} \leq \alpha \sup\left\{\int \psi dm \mid \psi \leq f\right\} = \alpha \int f dm.$$

Oletetaan edelleen, että f on mielivaltainen, mutta edelleen on $\alpha > 0$. Oletuksen nojalla $\int f dm$ on määritelty, joten

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm.$$

Mutta tällöin on todistuksen alkuosan perusteella

$$\begin{aligned} \alpha \int f dm &= \alpha \left(\int f^+ dm - \int f^- dm \right) = \alpha \int f^+ dm - \alpha \int f^- dm \\ &= \int \alpha f^+ dm - \int \alpha f^- dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = \int \alpha f dm. \end{aligned}$$

Seuraavaksi oletetaan, että $\alpha < 0$ ja $f \geq 0$. Aluksi todetaan, että tällöin

$$\begin{aligned} (\alpha f)^+ &= \max\{\alpha f, 0\} = \max\{-|\alpha|f, 0\} \\ &= |\alpha| \max\{-f, 0\} = |\alpha| f^- = -\alpha f^-. \end{aligned}$$

Vastaavasti todetaan, että

$$(\alpha f)^- = -\alpha f^+.$$

Mutta tällöin on

$$\begin{aligned} \alpha \int f dm &= \alpha \int f^+ dm - \alpha \int f^- dm = -(-\alpha) \int f^+ dm + (-\alpha) \int f^- dm \\ &= - \int (-\alpha) f^+ dm + \int (-\alpha) f^- dm = - \int (\alpha f)^- dm + \int (\alpha f)^+ dm = \int \alpha f dm. \end{aligned}$$

Kohdan (a) todistus saadaan päätettyä tarkastelemalla lopuksi tapaus $\alpha < 0$ ja f mielivaltainen. Tämä voidaan heti käsitellä samaan tapaan kuin se tilanne, jossa $\alpha > 0$ ja f on mielivaltainen.

(b) Oletetaan aluksi, että $f \geq g \geq 0$. Jos nyt ϕ on perusfunktio siten, että $0 \leq \phi \leq g$, on myös $\phi \leq f$ ja integraalin määritelmän nojalla on $\int \phi dm \leq \int f dm$. Koska perusfunktio $\phi \leq g$ valittiin mielivaltaisesti, ja $g \geq 0$, on

$$\int g dm = \sup\{\int \phi dm\} \leq \int f dm.$$

Jos sitten f, g ovat mielivaltaisia ja $f \geq g$, niin on $f^+ \geq g^+$ ja $f^- = \max\{-f, 0\} \leq \max\{-g, 0\} = g^-$. Koska $\int g dm$ on määritelty ja $> -\infty$, on oltava $\int g^- dm < \infty$. Tällöin on myös $\int f^- dm < \infty$ ja siis myös $\int f dm$ on määritelty. Lopuksi todetaan, että

$$\int g dm = \int g^+ dm - \int g^- dm \leq \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.$$

(c) Todistetaan vastaavalla tavalla kuin edellinen kohta, ks. Demot 8/2.

(d) Seuraa suoraan kahden edellisen kohdan perusteella, kun todetaan, että $-|f| \leq f \leq |f|$. Jälkimmäisen epäyhtälön perusteella on $\int |f| dm \geq \int f dm$. Toisaalta edellisen epäyhtälön nojalla $\int f dm \geq \int -|f| dm = -\int |f| dm$, joten $\int |f| dm \geq -\int f dm$, josta väite seuraa.

(e) Väite seuraa allaolevasta epäyhtälöketjusta, jossa oletetaan, että ϕ, ψ ovat perusfunktioita. Lisäksi on syytä huomata, että $\psi = \psi \chi_E$ aina, kun $\psi \leq f \chi_E$. Tällöin on

$$\begin{aligned} \sup\{\int_E \phi dm \mid \phi \leq f\} &= \sup\{\int \phi \chi_E dm \mid \phi \leq f\} = \sup\{\int \phi \chi_E dm \mid \phi \chi_E \leq f \chi_E\} \\ &\leq \sup\{\int \psi dm \mid \psi \leq f \chi_E\} = \int f \chi_E dm = \int_E f dm. \end{aligned}$$

Käänteinen epäyhtälö taas seuraa siitä, että $\psi = \psi \chi_E$ aina, kun perusfunktio $\psi \leq f \chi_E$.

(f) Olkoon E annettu mitallinen joukko. Koska $\int f dm$ on määritelty, on $\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm$, jolloin oikean puolen integraalit eivät voi samanaikaisesti olla $= \infty$. Toisaalta, koska $f^+ \geq (f \chi_E)^+$ ja $f^- \geq (f \chi_E)^-$, on myös $\int f^+ dm \geq \int (f \chi_E)^+ dm$ ja $\int f^- dm \geq \int (f \chi_E)^- dm$. Tällöin integraalit

$\int (f\chi_E)^+ dm$ ja $\int (f\chi_E)^- dm$ eivät voi samanaikaisesti olla äärettömiä, ja näin ollen niiden erotus

$$\int (f\chi_E)^+ dm - \int (f\chi_E)^- dm = \int f\chi_E dm = \int_E f dm$$

on määritelty.

Lause 8.6. Jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen funktio ja $E \subset \mathbb{R}$ on nollamittainen joukko, niin $\int_E f dm = 0$.

Todistus. Oletetaan aluksi, että ϕ on perusfunktio. Samoin on tällöin $\phi\chi_E$, joka voidaan esittää muodossa

$$\phi\chi_E(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

missä $\bigcup_{j=1}^n E_j = E$. Joukot $E_1, \dots, E_n$ ovat tietenkin nollamittaisia. Mutta tällöin on

$$\int_E \phi dm = \int \phi\chi_E dm = \sum_{j=1}^n a_j m(E_j) = 0.$$

Jos seuraavaksi oletetaan, että $f \geq 0$, seuraa väite suoraan Lauseen 8.5(e) perusteella.

Olkoon lopuksi f mielivaltainen. Tällöin todetaan aluksi, että $(f\chi_E)^+ = f^+\chi_E$ ja $(f\chi_E)^- = f^-\chi_E$, ks. Demot 9/2. Mutta nyt on

$$\begin{aligned} \int_E f dm &= \int f\chi_E dm = \int (f\chi_E)^+ dm - \int (f\chi_E)^- dm \\ &= \int f^+\chi_E dm - \int f^-\chi_E dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm = 0. \end{aligned}$$

Lemma 8.7. Olkoot ϕ, ψ kaksi perusfunktioita. Tällöin on

$$\int (\phi + \psi) dm = \int \phi dm + \int \psi dm.$$

Todistus. Kirjoitetaan annetut perusfunktiot muodossa

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}(x), \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j}.$$

Koska $\bigcup_{j=1}^n B_j = \mathbb{R}$, on $A_i = A_i \cap \mathbb{R} = A_i \cap \bigcup_{j=1}^n B_j = \bigcup_{j=1}^n A_i \cap B_j$, $i = 1, \dots, m$ ja vastaavasti $B_j = \bigcup_{i=1}^m A_i \cap B_j$, $j = 1, \dots, n$. Mutta leikkausjoukot $A_i \cap B_j$ ovat erillisiä, joten soveltamalla induktiopäätelyä demotehtävään 9/4 todetaan, että $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^n \chi_{A_i \cap B_j}$, $i = 1, \dots, m$ ja vastaavasti $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^m \chi_{A_i \cap B_j}$, $j = 1, \dots, n$. Mutta tällöin on

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \chi_{A_i \cap B_j}(x),$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j \chi_{A_i \cap B_j}(x)$$

ja

$$(\phi + \psi)(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}(x).$$

Perusfunktioiden integraalin määritelmän, Määritelmä 8.1, nojalla saadaan nyt

$$\int \phi dm = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i m(A_i \cap B_j), \quad \int \psi dm = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_j m(A_i \cap B_j)$$

ja

$$\int (\phi + \psi) dm = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j),$$

joista väite suoraan seuraa.

Lemma 8.8. *Olkoot A_1, A_2 kaksi erillistä mitallista joukkoa reaaliakselilla $\mathbb{R}$ ja olkoon $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ annettu perusfunktio. Tällöin*

$$\int_{A_1 \cup A_2} \phi dm = \int_{A_1} \phi dm + \int_{A_2} \phi dm.$$

Todistus. Koska joukot A_1, A_2 ovat erillisiä, on $\chi_A = \chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$. Mutta tällöin todetaan edellisen lemmän avulla, että

$$\begin{aligned} \int_A \phi dm &= \int \phi \chi_A dm = \int \phi (\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) dm \\ &= \int (\phi \chi_{A_1} + \phi \chi_{A_2}) dm = \int_{A_1} \phi dm + \int_{A_2} \phi dm. \end{aligned}$$

Tämän luvun päätteeksi todistetaan pari klassista konvergenssilause, nimittäin *monotonisen konvergenssin lause* ja *Fatoun lemma*. Edellisen avulla voidaan lopuksi todistaa, että integraali on additiivinen integroitavan funktion suhteen, mikä edellä todistettiin vain perusfunktioiden suhteen. Aluksi tarvitaan seuraava apulause:

Lemma 8.9. *Olkoon ϕ annettu ei-negatiivinen perusfunktio ja (ϕ_n) kasvava jono ei-negatiivisia perusfunktioita siten, että $\phi \leq \sup_n \phi_n$. Tällöin*

$$\int \phi dm \leq \sup_n \int \phi_n dm.$$

Todistus. Lähdetään tarkastelemaan perusfunktioita ϕ muodossa $\phi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x)$, ks. s. 45. Olkoon edelleen b annettu reaaliluku siten, että $0 < b < 1$. Merkitään

$$B_n := [\phi_n \geq b\phi] = [\phi_n - b\phi \geq 0]$$

.

Koska perusfunktiot ovat mitallisia funktioita, on jokainen B_n mitallinen joukko. Lisäksi todetaan, että $\phi_n \geq b\phi \chi_{B_n}$ jokaiselle n . Mutta Lauseen 8.5 nojalla on

$$\int \phi_n dm \geq b \int \phi \chi_{B_n} dm$$

jokaiselle n . Koska (ϕ_n) on kasvava jono, voidaan heti todeta, että (B_n) on kasvava joukkojono, ts. $B_n \subset B_{n+1}$ jokaiselle n . Vielä todetaan, että $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R}$, sillä jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ on voimassa $b\phi(x) < \phi(x) \leq \sup_n \phi_n(x) = \lim_n \phi_n(x)$ ja näin ollen x kuuluu johonkin joukkoon B_n . Tällöin on myös $(E_j \cap B_n)$ kasvava joukkojono jokaiselle $j = 1, \dots, n$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_j \cap B_n = E_j$ jokaiselle $j = 1, \dots, n$. Lauseen 7.8 perusteella voidaan nyt helposti todistaa, että jokaiselle j on voimassa $m(E_j) = \lim_n m(E_j \cap B_n)$, mikä todistetaan seuraavassa lemmassa. Mutta tämän perusteella on

$$\int \phi dm = \sum_{j=1}^n a_j m(E_j) = \lim_n \sum_{j=1}^n a_j m(E_j \cap B_n) = \lim_n \int \phi \chi_{B_n} dm$$

ja edelleen

$$\sup_n \int \phi_n dm \geq \sup_n b \int \int \phi \chi_{B_n} dm = b \lim_n \int \phi \chi_{B_n} dm = b \int \phi dm.$$

Koska b oli mielivaltaisesti valittu väliltä $(0, 1)$, seuraa väite edellisestä epäyhtälöstä.

Lemma 8.10. *Jos (A_n) on nouseva jono mitallisia joukkoja, ja $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, niin $m(A) = \lim_n m(A_n)$.*

Todistus. Jos merkitään $A_0 = \emptyset$ ja $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ jokaiselle n , niin selvästi joukot B_n ovat erillisiä joukkoja, niiden yhdiste on A ja $A_n = \bigcup_{j=1}^n B_j$. Lauseen 7.8 nojalla todetaan heti, että

$$m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j) = \lim_n \sum_{j=1}^n m(B_j) = \lim_n m(A_n).$$

Palautetaan nyt mieleen Lause 7.21, jonka mukaan jokainen ei-negatiivinen mitallinen funktio voidaan esittää kasvavan perusfunktiojonon raja-arvona.

Lause 8.11. *Olkoon f ei-negatiivinen mitallinen funktio reaaliakselilla ja (ϕ_n) kasvava jono perusfunktioita siten, että $f = \lim_n \phi_n = \sup_n \phi_n$. Tällöin on $\int f dm = \lim_n \int \phi_n dm = \sup_n \int \phi_n dm$.*

Todistus. Määritelmän 8.2 perusteella

$$\sup_n \int \phi_n dm \leq \sup \left\{ \int \phi dm \mid \phi \leq f \right\} = \int f dm.$$

Käänteisen epäyhtälön todistamiseksi olkoon nyt ϕ mielivaltainen perusfunktio, jolle on $\phi \leq f = \sup_n \phi_n$. Lemman 8.9 nojalla on tällöin $\int \phi dm \leq \sup_n \int \phi_n dm$ ja siis ei-negatiivisen funktion integraalin määritelmän (Määritelmä 8.2) nojalla

$$\int f dm = \sup \left\{ \int \phi dm \mid \phi \leq f \right\} \leq \sup_n \int \phi_n dm.$$

Huomautus. Edellisen lauseen perusteella ei-negatiivisen mitallisen funktion integraali on riippumaton siitä perusfunktiojonosta, jonka raja-arvona integroitava funktio on esitetty.

Lause 8.12. (*Monotonisen konvergenssin lause*) Olkoon (f_n) nouseva jono ei-negatiivisia mitallisia funktioita reaaliakselilla $\mathbb{R}$ ja oletetaan, että jono suppenee kohti funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin on

$$\int f dm = \int (\lim_n f_n) dm = \lim_n \int f_n dm.$$

Todistus. Lauseen 7.16 nojalla rajafunktio f on (ei-negatiivinen) mitallinen funktio. Lauseen 8.5(c) nojalla $\int f_n dm \leq \int f dm$ jokaiselle n ja näin ollen

$$\sup_n \int f_n dm \leq \int f dm.$$

Käänteisen epäyhtälön todistamiseksi riittää konstruoida nouseva jono (ϕ_n) perusfunktioita siten, että $\sup_n \phi_n = f$ ja että $\phi_n \leq f_n$ jokaiselle n . Tällöin on nimittäin Lauseen 8.5(c) nojalla $\int \phi_n dm \leq \int f_n dm$, jolloin Lauseen 8.11 nojalla on

$$\int f dm = \sup_n \int \phi_n dm \leq \int f_n dm.$$

Sanottu jono (ϕ_n) voidaan nyt konstruoida seuraavasti: Lauseen 7.21 nojalla jokaista funktiota f_n vastaa nouseva jono $(\psi_{n,m})$ perusfunktioita siten, että $\sup_m \psi_{n,m} = f_n$. Määritellään nyt ϕ_n asettamalla

$$\phi_n := \max\{\psi_{n,1}, \psi_{n,2}, \dots, \psi_{n,n}\}.$$

Tällöin on nimittäin suoraan konstruktion nojalla jono (ϕ_n) on kasvava ja $\phi_n \leq f_n$ ja siis $\sup_n \phi_n \leq \sup_n f_n = f$. Toisaalta on jokaiselle $n \geq m$ voimassa $\psi_{n,m} \leq \phi_n$ ja edelleen

$$\sup_m \psi_{n,m} = f_n \leq \sup_m \phi_m.$$

Mutta tästä seuraa, että $f = \sup_n f_n \leq \sup_m \phi_m$.

Lause 8.13. (*Fatoun lemma*) *Olkoon (f_n) annettu jono ei-negatiivisia mitallisia numeerisia funktioita reaaliakselilla. Tällöin on*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm.$$

Todistus. Tarkastellaan funktioita $f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ ja $g_n := \inf_{m \geq n} f_m$ jokaiselle n . Alaraja-arvon määritelmän nojalla on (g_n) nouseva jono ja $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. monotonisen konvergenssin lauseen (Lause 8.12) nojalla on

$$\int f dm = \sup_n \int g_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dm.$$

Mutta toisaalta on jokaiselle $m \geq n$ voimassa $g_n \leq f_m$, ja siis $\int g_n dm \leq \int f_m dm$. Näin ollen on

$$\int g_n dm \leq \inf_{m \geq n} \int f_m dm$$

ja edelleen

$$\int f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} \int f_m dm = \lim_n \inf_n \int f_n dm.$$

Lopuksi todetaan, esimerkkinä muista vastaavista konvergenssilauseista, Lebesguen dominoidun konvergenssin lause, kuitenkin ilman todistusta:

Lause 8.14. *Olkoon (f_n) jono mitallisia funktioita reaaliakselilla ja olkoon f mitallinen funktio siten, että $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ m.k., ts. nollamittaisen joukon ulkopuolella. Jos lisäksi on olemassa integroitava funktio g siten, että $|f_n| \leq g$ kaikille n , niin on*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n f dm = \int f dm.$$

Tämän luvun viimeisenä varsinaisena tuloksena todistetaan, tosin vain erikoistapaukseen rajoittuen, että integraali on additiivinen integroitavan funktion suhteen.

Lause 8.15. *Olkoot f ja g mitallisia numeerisia funktioita reaaliakselilla ja oletetaan, että $f + g$ on määritelty. Jos tällöin $\int f dm$, $\int g dm$ ja $\int f dm + \int g dm$ ovat määriteltyjä, niin*

$$\int (f + g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

Todistus. Edellä todistettiin jo, että väite pätee perusfunktioille, ks. Lemma 8.7. Todistuksen yleistys mitallisille funktioille toteutetaan olennaisesti nojautuen monotonisen konvergenssin lauseeseen, Lause 8.12. Rajoitutaan tarkastelemaan tapausta, jossa sekä f että g ovat ei-negatiivisia. Tällöin tiedetään, Lause 7.21, että on olemassa kasvavat jonot (ϕ_n) ja (ψ_n) (ei-negatiivisia) perusfunktioita siten, että

$$f = \sup_n \phi_n, \quad g = \sup_n \psi_n.$$

Tällöin myös $(\phi_n + \psi_n)$ on nouseva jono perusfunktioita ja $\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n + \psi_n) = f + g$. Monotonisen konvergenssin lauseen, Lause 8.12, nojalla on nyt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n + \psi_n) dm = \int (f + g) dm.$$

Mutta Lemman 8.7 nojalla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n dm + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int \phi_n dm + \int \psi_n dm \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n + \psi_n) dm = \int (f + g) dm.$$

Mutta vasemmanpuoleisimman summan molempiin termeihin voidaan soveltaa uudestaan monotonisen konvergenssin lausetta, jolloin saadaan

$$\int f dm + \int g dm = \int (f + g) dm.$$

Muiden mahdollisuuksien käsittely sivuutetaan tässä yhteydessä.

Tämän luvun päätteeksi toteamme ilman todistusta, että edellä käsitelty Lebesgue-integraali on itse asiassa analyysin peruskurssissa käsitellyn Riemann-integraalin yleistys, kuten seuraavat kaksi lausetta osoittavat:

Lause 8.16. *Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu ja Riemannin mielessä integroituva. Tällöin on myös Lebesguen mielessä integroituva kyseisellä välillä ja molemmilla integraaleilla on sama arvo.*

Lause 8.17. *Rajoitettu funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemannin mielessä integroituva jos ja vain jos f on melkein kaikkialla jatkuva välillä $[a, b]$.*

9 Klassiset funktioavaruudet

9.1 Klassiset epäyhtälöt

Johdatuksena klassisten funktioavaruuksien perusasioihin johdetaan aluksi erikseen kolme klassista epäyhtälöä: Hölderin, Schwarzin ja Minkowskin epäyhtälöt. Tässä yhteydessä on syytä huomauttaa, että kyseiset epäyhtälöt ovat voimassa yleisemmin kuin vain tässä alaluvussa, jossa rajoitutaan mittaavaruuteen $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, ts. kolmikkoon, jossa m on edellä käsitelty Lebesguen mitta ja $\mathcal{M}$ on vastaava mitallisten joukkojen kokoelma.

Aluksi todistetaan seuraava

Lemma 9.1. *Olettaen, että $a, b \geq 0$ ja $0 < \lambda < 1$, on*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b,$$

missä yhtäläisyysmerkki on voimassa vain, jos $a = b$.

Todistus. Aluksi todetaan, että $\lambda a + (1-\lambda)b - a^\lambda b^{1-\lambda} = 0$, jos $a=b$. Voidaan näin ollen olettaa, että $0 \leq a < b$. Tarkastellaan nyt funktiota $f(t) := t^{1-\lambda}$ välillä $[a, b]$. Selvästi funktio f toteuttaa perusanalyysin väliarvolauseen ehdot, ja näin ollen on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Mutta $f'(t) = (1-\lambda)t^{-\lambda}$ ja siis $f'(c) = (1-\lambda)c^{-\lambda} \leq (1-\lambda)a^{-\lambda}$. Sijoittamalla väliarvolauseen antamaan yhtälöön saadaan

$$b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} = (1-\lambda)(b-a)c^{-\lambda} \leq (1-\lambda)(b-a)a^{-\lambda}.$$

Kertomalla molemmat puolet luvulla a^λ saadaan

$$a^\lambda b^{1-\lambda} - a \leq (1-\lambda)(b-a) = (1-\lambda)b - a + \lambda a,$$

josta väitetty epäyhtälö heti seuraa. Sen todistaminen lopuksi, että yhtäsuuruudesta väitetyssä epäyhtälössä seuraa, että $a = b$, jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 9.2. (Hölder) *Oletetaan, että $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja että $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia funktioita. Edelleen oletetaan, että $|f|^p$ ja $|g|^q$ ovat integroituvia (siinä mielessä, että ko. funktioiden integraalit, jotka selvästi ovat määriteltyjä, ovat äärellisiä). Tällöin $|fg|$ on integroituva ja mielivaltaiselle mitalliselle joukolle $E \subset \mathbb{R}$ on voimassa*

$$\int_E |fg| dm \leq \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q dm \right)^{1/q}.$$

Todistus. Aluksi todetaan, että väitetyn epäyhtälön molemmat puolet ovat $= 0$, mikäli $m(E) = 0$. Voidaan siis olettaa, että $m(E) > 0$. Edelleen, jos $fg = 0$ melkein kaikkialla joukossa E , niin väitetyn epäyhtälön vasen puoli $= 0$. Voidaan siis edelleen olettaa, että $fg \neq 0$ joukon E osajoukossa, jonka mitta on positiivinen, ts. $m(E \cap [fg \neq 0]) > 0$. Mutta tällöin välttämättä $\int_E |f|^p dm > 0$ ja $\int_E |g|^q dm > 0$. Jos nyt oletetaan $x \in E$ ja merkitään

$$a := \frac{|f(x)|^p}{\int_E |f|^p dm}, \quad b := \frac{|g(x)|^q}{\int_E |g|^q dm}, \quad \lambda := \frac{1}{p}, \quad 1 - \lambda = \frac{1}{q}$$

saadaan Lemman 9.1 perusteella jokaisessa pisteessä $x \in E$

$$\frac{|f(x)g(x)|}{(\int_E |f|^p dm)^{1/p} (\int_E |g|^q dm)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_E |f|^p dm} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_E |g|^q dm}.$$

Integroimalla nyt yli joukon E saadaan

$$\frac{\int_E |fg| dm}{(\int_E |f|^p dm)^{1/p} (\int_E |g|^q dm)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

josta väitetty epäyhtälö suoraan seuraa. Samalla tulee myös todistetuksi integraalin $\int_E |fg| dm$ äärellisyys.

Seuraus 9.3. (*Schwarzin epäyhtälö*) Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia funktioita ja että funktiot $|f|^2$ ja $|g|^2$ ovat integroituvia. Tällöin myös funktio $|fg|$ on integroituva ja jokaiselle mitalliselle joukolle E on voimassa

$$\int_E |fg| dm \leq \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_E |g|^2 \right)^{1/2}.$$

Todistus. Valitaan $p = q = 2$ ja sovelletaan Hölderin epäyhtälöä.

Lause 9.4. (*Minkowski*) Oletetaan, että $1 \leq p < \infty$ ja että funktiot $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia. Lisäksi oletetaan, että funktiot $|f|^p$ ja $|g|^p$ ovat integroituvia. Tällöin $|f + g|^p$ on integroituva ja jokaiselle mitalliselle joukolle E on voimassa

$$\left(\int_E |f + g|^p dm \right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p dm \right)^{1/p}.$$

Todistus. Jos $p = 1$, seuraa väite suoraan kolmioepäyhtälöstä $|f + g| \leq |f| + |g|$ integroimalla. Voidaan siis olettaa, että $1 < p < \infty$. Tarkastellaan

aluksi joukkoja $E_1 := E \cap [|f| \geq |g|]$ ja $E_2 := E \cap [|f| < |g|]$, jotka selvästi ovat mitallisia joukkoja. Jos $x \in E_1$, on kolmioepäyhtälön nojalla

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p |f(x)|^p$$

ja vastaavasti

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p |g(x)|^p,$$

jos $x \in E_2$. Koska $|f|^p$ ja $|g|^p$ ovat oletuksen nojalla integroituvia, on myös $|f + g|^p$ integroituva.

Varsinaisen epäyhtälön todistamiseksi voidaan olettaa, että $\int_E |f + g|^p dm > 0$. Koska $p > 1$, on kolmioepäyhtälön ja integraalin perusominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} \int_E |f + g|^p dm &= \int_E |f + g| |f + g|^{p-1} dm \\ &\leq \int_E (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} dm = \int_E |f| |f + g|^{p-1} dm + \int_E |g| |f + g|^{p-1} dm. \end{aligned}$$

Valitaan nyt q siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, jolloin $1 < q < \infty$ ja $q(p-1) = p$. Nyt voidaan soveltaa oikean puolen molempiin integraaleihin Hölderin epäyhtälöä ja saadaan

$$\begin{aligned} &\int_E |f + g|^p dm \\ &\leq \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_E |f + g|^{q(p-1)} dm \right)^{1/q} + \left(\int_E |g|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_E |f + g|^{q(p-1)} dm \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_E |f + g|^p dm \right)^{1/q} + \left(\int_E |g|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_E |f + g|^p dm \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Jakamalla nyt puolittain luvulla $(\int_E |f + g|^p dm)^{1/q} > 0$ saadaan

$$\left(\int_E |f + g|^p dm \right)^{1-1/q} \leq \left(\int_E |f|^p dm \right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p dm \right)^{1/p},$$

josta väite seuraa, koska $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

9.2 L^p -avaruudet

Oletetaan aluksi, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen funktio ja että on olemassa b , $0 < b < \infty$ niin, että $f(x) \leq b$ melkein kaikkialla, ts. nollamittaisen joukon ulkopuolella. Tällöin voidaan määritellä funktion f *oleellinen yläraja* asettamalla

$$\text{ess sup } f := \inf \{b \mid f(x) \leq b \quad \text{m.k.}\}.$$

Jos tässä tarkoitettu äärellinen luku b on olemassa, sanotaan, että funktio f on (ylöspäin) *oleellisesti rajoitettu*.

Määritelmä 9.5. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Mitallinen funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kuuluu funktioavaruuteen $L^p(\mathbb{R})$, jos $(\int |f|^p dm)^{1/p} < \infty$.

Määritelmä 9.6. Mitallinen funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kuuluu funktioavaruuteen $L^\infty(\mathbb{R})$, jos $|f|$ on oleellisesti rajoitettu, ts. jos $\text{ess sup } |f| < \infty$.

Seuraavassa käytetään lyhyempiä merkintöjä L^p ja L^∞ .

Äsken määritellyt funktioavaruudet voidaan liittää edellisen luvun integroituvuuteen todistamalla

Lause 9.7. *Funktioavaruus L^1 on täsmälleen kaikkien reaaliakselilla määriteltyjen integroituvien (ts. integraali on määritelty ja $-\infty < \int f dm < \infty$) numeeristen funktioiden kokoelma.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on integroituva, jolloin siis

$$-\infty < \int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm < \infty.$$

Koska integraalit $\int f^+ dm$ ja $\int f^- dm$ eivät samanaikaisesti ole äärettömiä, ovat molemmat äärellisiä. Mutta $|f| = f^+ + f^-$, joten

$$\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm < \infty,$$

ja siis näin ollen $f \in L^1$.

Oletetaan sitten kääntäen, että $f \in L^1$. Koska $|f| \geq f^+$, on

$$\int f^+ dm \leq \int |f| dm < \infty,$$

ja siis f^+ on integroitava. Vastaavasti nähdään, että f^- on integroitava ja edelleen $f = f^+ - f^-$ on myös integroitava.

Seuraavassa samaistetaan ilman eri mainintaa kaksi funktiota $f, g \in L^p$ aina, jos $f(x) = g(x)$ m.k., ts. jos $m[f \neq g] = 0$. Tarkkaan ottaen tällöin L^p jakautuu ekvivalenssiluokkiin, ja käsitteellä L^p itse asiassa jatkossa tarkoitetaan näiden ekvivalenssiluokkien kokoelmaa. Seuraavan lauseen todistamiseksi tarvitaan vielä

Lemma 9.8. *Jos mitallinen funktio $f \geq 0$ m.k. ja $\int f dm = 0$, on $f = 0$ m.k.*

Todistus. Merkitään $A_0 := [f > 0]$ ja $A_n := [f > \frac{1}{n}]$. Tällöin (A_n) on nouseva jono mitallisia joukkoja ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_0$. Tällöin on helppoa todistaa (harjoitustehtävä), että $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = m(A_0)$. Jos nyt $m(A_0) > 0$, on olemassa n siten, että $m(A_n) > 0$. Mutta tällöin on

$$\int f dm \geq \int_{A_n} f dm \geq \frac{m(A_n)}{n} > 0,$$

mikä on ristiriita.

Lause 9.9. *Oletetaan, että $1 \leq p \leq \infty$. Tällöin avaruus L^p on (reaalikertoiminen) lineaariavaruus. Jos edelleen määritellään $d_p : L^p \times L^p \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $d_p(f, g) := (\int |f - g|^p dm)^{1/p}$, kun $1 \leq p < \infty$ ja $d_{\infty}(f, g) := \text{esssup } |f - g|$, on (L^p, d_p) metrinen avaruus.*

Todistus. Lauseen 7.12 nojalla tiedetään, että mitalliset funktiot muodostavat (reaalikertoimisen) lineaariavaruuden. Todistetaan ensimmäinen väite osoittamalla, että L^p on mitallisten funktioiden muodostaman lineaariavaruuden lineaarinen aliavaruus, ks. Määritelmä 1.2.

Olkoon aluksi $p = \infty$, $f, g \in L^p$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Koska $f, g \in L^p$, on $|f| \leq b_f < \infty$ m.k. jollekin reaaliluvulle b_f ja vastaavasti $|g| \leq b_g < \infty$ m.k. Mutta tällöin on $|f + g| \leq |f| + |g| \leq b_f + b_g < \infty$ m.k. ja siis $\text{esssup } |f + g| < \infty$, ts. $f + g \in L^p$. Jos $\alpha = 0$, on $\alpha f \in L^p$ triviaalisti. Jos taas $\alpha \neq 0$, on $|\alpha f| < \infty$ jos ja vain jos $|f| < \infty$, ja näin ollen $\alpha f \in L^p$.

Jos nyt $1 \leq p < \infty$, todetaan Minkowskin epäyhtälön nojalla heti, että

$$(\int |\alpha f + \beta g|^p dm)^{1/p} \leq (\int |\alpha f|^p dm)^{1/p} + (\int |\beta g|^p dm)^{1/p}$$

$$|\alpha|(\int |f|^p dm)^{1/p} + |\beta|(\int |g|^p dm)^{1/p},$$

josta suoraan seuraa, että $\alpha f + \beta g \in L^p$.

Toisen väitteen todistamiseksi olkoon aluksi $1 \leq p < \infty$. Suoraan kuvauksen d_p määritelmän perusteella todetaan, että $d_p(f, g) \geq 0$ ja $d_p(f, g) = d_p(g, f)$ kaikille $f, g \in L^p$. Jos sitten oletetaan, että $d_p(f, g) = 0$, on edellisen lemmän perusteella $f - g = 0$ ja siis $f = g$ m.k. Mutta tämä merkitsee edellä sovitun samaistuksen perusteella, että $f = g$. Jäljelle jää kolmioepäyhtälö, joka seuraa suoraan Minkowskin epäyhtälöstä:

$$\begin{aligned} d_p(f, h) &= (\int |f - h|^p dm)^{1/p} = (\int |(f - g) + (g - h)|^p dm)^{1/p} \\ &\leq (\int |f - g|^p dm)^{1/p} + (\int |g - h|^p dm)^{1/p} = d_p(f, g) + d_p(g, h). \end{aligned}$$

Harjoitustehtäväksi jätetään kuvauksen d_∞ todistaminen metriikaksi.

Lause 9.10. (a) Jos $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja $f \in L^p$, $g \in L^q$, niin $fg \in L^1$.

(b) Jos $1 \leq p \leq \infty$ ja $f \in L^p$, $g \in L^\infty$, niin $fg \in L^p$.

Todistus. (a) Väite on suora seuraus Hölderin epäyhtälöstä.

(b) Jos $p = \infty$, todetaan samaan tapaan kuin Lauseen 9.9 todistuksessa, että on olemassa reaaliluvut b_f, b_g siten, että $|f| \leq b_f$ m.k. ja $|g| \leq b_g$ m.k. Mutta tällöin on $|fg| \leq b_f b_g$ m.k., joten on $fg \in L^\infty$. Jos sitten $p < \infty$, valitaan b niin, että $|g| \leq b$ m.k. Tällöin on

$$(\int |fg|^p)^{1/p} \leq b(\int |f|^p)^{1/p} < \infty$$

oletuksen $f \in L^p$ nojalla.

Mitta- ja integrointiteorialle tyypillinen käsite on *suppeneminen mitan suhteen*, joka määritellään seuraavasti:

Määritelmä 9.11. Mitallisten funktioiden jono (f_n) suppenee mitan m suhteen kohti mitallista funktiota f , jos jokaista $\varepsilon > 0$ ja jokaista $\delta > 0$ vastaa luonnollinen luku $N = N(\varepsilon, \delta)$ siten, että

$$m(|f_n - f| \geq \varepsilon) < \delta$$

aina, kun $n \geq N$.

Vastaavalla tavalla määritellään seuraavassa lemmassa tarvittava Cauchyn jonon käsite mitan m suhteen.

Lemma 9.12. *Jos mitallisten funktioiden jono (f_n) on Cauchyn jono mitan m suhteen, niin on olemassa jonon (f_n) osajono, joka on Cauchyn jono melkein kaikkialla.*

Todistus. Sen nojalla, että (f_n) on Cauchyn jono mitan m suhteen, vastaa jokaista luonnollista lukua k toinen luonnollinen luku N_k siten, että

$$m(|f_n - f_j| \geq \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^k}$$

aina, kun $n, j \geq N_k$. Määritellään nyt jono (n_k) induktiivisesti asettamalla

$$n_1 := N_1, \quad n_2 := \max\{n_1 + 1, N_2\}, \quad n_3 := \max\{n_2 + 1, N_3\}, \dots$$

Tällöin (f_{n_k}) on jonon (f_n) ääretön osajono ja edellinen mittaepäyhtälö on voimassa aina, kun $n, j \geq n_k = \max\{n_{k-1} + 1, N_k\}$. Jokaista luonnollista lukua k kohti määritellään nyt joukko

$$E_k := \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq \frac{1}{2^k}\}.$$

Olkoot nyt $i \in \mathbb{N}$ ja $0 < \varepsilon < 1$ mielivaltaisia. Jos $r > s \geq i$ ja $x \notin \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$, niin on

$$|f_{n_r}(x) - f_{n_s}(x)| = \left| \sum_{k=s}^{r-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \right| \leq \sum_{k=s}^{r-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

$$\leq \sum_{k=s}^{r-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{s-1}} < \varepsilon$$

edellyttäen, että $s > 1 + (\log \frac{1}{\varepsilon})/(\log 2)$. Näin on todettu, että jono (n_k) määrää funktiojonon (f_n) osajonon, joka on (pisteittäin) Cauchyn jono kaikille $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$. Mutta tällöin on

$$m(\bigcup_{k=i}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} m(E_k) \leq_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} < \delta$$

edellyttäen, että $i > 1 + (\log \frac{1}{\delta})/(\log 2)$. Mutta tämä merkitsee sitä, että jonolla (f_n) on osajono, joka on Cauchyn jono nollamittaisen joukon ulkopuolella, nimittäin joukon $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$ ulkopuolella. Jos nimittäin $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k)$, niin $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$ jollekin i . Mutta edellä todetun nojalla $(f_{n_k}(x))$ on Cauchyn jono. Edelleen, jokaiselle i on

$$m(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

joten välttämättä $m(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k) = 0$.

Toinen tyypillinen suppenemiskäsite L^p -avaruuksissa on *suppeneminen metriikan d_p suhteen*, joka määritellään seuraavasti:

Määritelmä 9.13. *Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Tällöin L^p -funktioiden jono (f_n) suppenee kohti funktiota $f \in L^p$ metriikan d_p suhteen, jos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_p(f_n, f) = 0.$$

Lause 9.14. *Jos $1 \leq p \leq \infty$ ja L^p -funktioiden jono (f_n) on Cauchyn jono metriikan d_p suhteen, niin (f_n) on Cauchyn jono Lebesguen mitan m suhteen.*

Todistus. Käsitellään tässä tapaus $p < \infty$ ja jätetään tapaus $p = \infty$ harjoitustehtäväksi. Oletuksen nojalla jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa N_ε siten, että

$$\int |f_n - f_s|^p dm < (\sqrt[p]{\varepsilon})^{1/p} = \varepsilon$$

aina, kun $n, s \geq N_\varepsilon$. Jos nyt oletetaan, että jono (f_n) ei ole Cauchyn jono mitan m suhteen, niin jokaista luonnollista lukua N vastaa luonnolliset luvut n, s niin, että $m(|f_n - f_s| \geq \beta) \geq \gamma$. Mutta tällöin on

$$\int |f_n - f_s|^p dm \geq \beta^p \gamma > 0.$$

Ristiriita seuraa valitsemalla $\varepsilon < \beta^\beta \gamma$ ja $N > N_\varepsilon$.

Seuraavaksi todistetaan Riesz-Fischerin lause, joka yhdessä Lauseen 9.9 nojalla sisältää sen tiedon, että L^p on täydellinen metrinen avaruus.

Lause 9.15. *Oletetaan, että $1 \leq p \leq \infty$ ja että (f_n) on Cauchyn jono metriikan d_p suhteen. Silloin (f_n) suppenee kohti jotakin funktiota $f \in L^p$ metriikan d_p suhteen.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $1 \leq p < \infty$. Edellisen lemmän nojalla jono (f_n) on Cauchyn jono Lebesguen mitan m suhteen. Edelleen Lemma 9.12 nojalla voidaan valita osajono (f_{n_k}) , joka on Cauchyn jono melkein kaikkialla. Näin ollen, $(f_{n_k}(x))$ on Cauchyn jono melkein kaikkialla reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, on olemassa

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$$

melkein kaikkialla. Lauseiden 7.14 ja 7.16 nojalla rajafunktio, jatkettuna mielivaltaisella tavalla koko reaaliakselille, on mitallinen funktio.

Olko nyt $\varepsilon > 0$. Koska (f_n) on Cauchyn jono metriikan d_p suhteen, on olemassa $N = N_\varepsilon$ siten, että $(\int |f_n - f_s|^p dm)^{1/p} < \varepsilon$ aina, kun $n, s \geq N$. Mutta tällöin on Fatoun lemma nojalla

$$\begin{aligned} \varepsilon^p &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_n - f_{n_k}|^p dm \\ &\geq \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_n - f_{n_k}|^p dm = \int |f_n - f|^p dm. \end{aligned}$$

Mutta tämä merkitsee sitä, että $\lim_{n \rightarrow \infty} d_p(f_n, f) = 0$. Edellisen epäyhtälön nojalla on myös $f_n - f \in L^p$ kaikille $n \geq N$. Koska L^p on lineaariavaruus ja $f_n \in L^p$ kaikille n , on myös $f \in L^p$.

Lopuksi olko $p = \infty$ ja (f_n) Cauchyn jono metriikan L^∞ suhteen. Näin ollen, jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, on olemassa luonnollinen luku N siten, että $|f_n - f_s| < \varepsilon$ m.k. aina, kun $n, s \geq N$. Toisin sanoen, $(f_n(x))$ on Cauchyn jono m.k. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, on olemassa $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ m.k. Rajafunktion mitallisuus todetaan, kuten todistuksen alkuosassa. Todistettavaksi jää vielä, että $f \in L^\infty$. Mutta nyt on olemassa (aidosti) positiivinen reaaliluku b siten, että $|f_N| \leq b$ m.k., jolloin siis

$$|f| \leq |f - f_N| + |f_N| \leq \varepsilon + b < \infty$$

m.k. ja siis $f \in L^\infty$.

Lopuksi todetaan, että L^p -avaruuksilla on ns. sisäkkäisyysominaisuus (nesting property) äärellismittaisessa joukossa:

Lause 9.16. *Olkoot $1 \leq p < q \leq \infty$ ja $a < b$ kaksi reaalilukua. Tällöin on $L^q([a, b]) \subset L^p([a, b])$.*

Todistus. Oletetaan siis, että $f \in L^\infty([a, b])$ ja olkoon aluksi $q = \infty$. Tällöin on olemassa positiivinen reaaliluku b siten, että $|f(x)| \leq B$ m.k. välillä $[a, b]$. Mutta tällöin on

$$\left(\int_{[a,b]} |f|^p dm \right)^{1/p} \leq Bm([a, b])^{1/p} = B(b-a)^{1/p} < \infty,$$

joten $f \in L^p([a, b])$.

Oletetaan sitten, että $q < \infty$ ja määritellään $r := q/p > 1$ ja $s := q/(q-p) > 1$. Tällöin r ja s ovat konjugaattilukuja siinä mielessä, että

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1.$$

Hölderin epäyhtälöä käyttäen saadaan nyt

$$\begin{aligned} \left(\int_{[a,b]} |f|^p dm \right)^{1/p} &= \left(\int_{[a,b]} |f|^p 1 dm \right)^{1/p} \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^{rp} dm \right)^{1/r} \left(\int_{[a,b]} 1^s dm \right)^{1/s} \\ &\leq \left(\left(\int_{[a,b]} |f|^q dm \right)^{p/q} (b-a)^{1/s} \right)^{1/p} \leq C(b-a)^{1/(sp)} < \infty, \end{aligned}$$

missä C on oletuksen nojalla määräytyvä reaaliluku. Näin ollen on $f \in L^p([a, b])$.

9.3 l^p -avaruudet

Aluksi todetaan, että reaalitylukujono (x_n) voidaan tulkita kuvauksena $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Käyttäen tätä tulkintaa voidaan seuraavassa käsiteltävät l^p -avaruudet tulkita L^p -avaruuksien diskreeteiksi versioiksi.

Määritelmä 9.17. *Olkoon $1 \leq p < \infty$. Reaalitylukujono $(x_n) \in l^p$, jos $(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} < \infty$.*

Vastaavasti asetetaan

Määritelmä 9.18. *Reaalitylukujono $(x_n) \in l^\infty$, jos $\sup_n |x_n| < \infty$.*

Tarkastellaan nyt luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ kaikkien osajoukkojen koelmaa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ja merkitään jokaiselle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.s. jokaiselle $A \subset \mathbb{N}$ siihen kuuluvien lukujen lukumäärää $\mu(A)$. Nyt on helppo todeta, että $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ on mitta-avaruus. Mittaa μ voidaan kutsua *lukumäärämitaksi*. Toistamalla Lukujen 7 ja 8 päättelyt voidaan mittaa μ vastaava integrointiteoria helposti rakentaa, ja on ilmeistä, että funktiota $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, toisin sanoen lukujonoa (x_n) vastaava integraali mitan μ suhteen on $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ edellyttäen, että ko. summa on määritelty. Kuten edellä, lukujonoa (x_n) voidaan sanoa integroituvaksi, jos $(x_n) \in l^1$. Seuraavassa todetaan lyhyesti, pääosin ilman todistuksia, L^p -avaruuksien edellä esitettyjä tuloksia vastaavat l^p -avaruuksien lauseet.

Aluksi palautetaan mieleen, että Hölderin, Schwarzin ja Minkowskin epäyhtälöillä on luonnolliset vastineensa l^p -avaruudessa, ks. Demotehtävä 11/5.

Lause 9.19. *Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Tällöin avaruus l^p on lineaariavaruus. Jos edelleen määritellään kuvaus $d_p : l^p \times l^p \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $d_p((x_n), (y_n)) := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{1/p}$, kun $p < \infty$ ja $d_\infty((x_n), (y_n)) := \sup_n |x_n - y_n|$, kun $p = \infty$, on kuvaus d_p metriikka ja siis (l^p, d_p) metrinen avaruus.*

Todistus. Todistuksen ajatus voidaan suoraan kopioida L^p -avaruuksien vastaavasta lauseesta, Lause 9.9.

Avaruuksien l^p täydellisyyden todistaminen voidaan myös suoraan toteuttaa kopioimalla L^p -avaruuksien vastaavaa todistusta. Kuitenkin jonon merkintää käytettäessä päättely voi jossain määrin muodostua hankalaksi. Tämän vuoksi hahmotellaan todistuksen pääpiirteet seuraavassa. Cauchyn jonon käsitteen määrittelemiseksi avaruudessa l^p tarkastellaan jonojen $(x_{n,k})_k \in l^p$ muodostamaa jonoa $((x_{n,k})_k)_n$. Tämä jonojen muodostama jono on Cauchyn jono metriikan d_p suhteen, mikäli jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa luonnollinen luku N_ε siten, että $d_p((x_{n,k})_k, (x_{s,k})_k)$ aina, kun $n, s \geq N_\varepsilon$.

Lemma 9.20. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Jos $((x_{n,k})_k)_n \subset l^p$ on Cauchyn jono metriikan d_p suhteen, niin on olemassa reaali vakio $C > 0$ siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^p\right)^{1/p} \leq C,$$

kun $p < \infty$ ja

$$\sup_k |x_{n,k}| \leq C,$$

kun $p = \infty$.

Todistus. Käsitellään tapaus $p < \infty$. Cauchyn jonon määritelmän nojalla, ks. edellä, on olemassa luonnollinen luku N siten, että

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{s,k}|^p\right)^{1/p} \leq 1$$

aina, kun $n, s \geq N$. Mutta tällöin Minkowskin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{n,k} - x_{N,k}) + x_{N,k}|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{N,k}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{N,k}|^p\right)^{1/p} \leq 1 + D < \infty, \end{aligned}$$

missä D määräytyy siitä tiedosta, että $(x_{N,k})_k \in l^p$. Toisaalta, koska $(x_{n,k})_k \in l^p$ jokaiselle n , niin on olemassa aidosti positiiviset reaali vakiot $C_1, \dots, C_{N-1}$ siten, että

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{j,k}|^p\right)^{1/p} \leq C_j, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Mutta tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^p\right)^{1/p} \leq \max\{C_1, \dots, C_{N-1}, 1 + D\} < \infty.$$

Tapaus $p = \infty$ todistetaan vastaavalla tavalla käyttäen hyväksi metriikkaa d_{∞} .

Lopuksi todistetaan avaruuksien l^p täydellisyys:

Lause 9.21. *Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. Tällöin jokainen Cauchyn jono avaruudessa l^p suppenee metriikan d_p suhteen avaruudessa l^p .*

Todistus. Rajoitutaan todistamaan tapaus $p < \infty$, koska tapaus $p = \infty$ todistetaan vastaavalla tavalla metriikan d_∞ avulla.

Olkoon siis $((x_{n,k})_k)_n \subset l^p$ Cauchyn jono ja olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltaisesti annettu. Tällöin on olemassa luonnollinen luku N_ε siten, että

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{s,k}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \quad (1)$$

aina, kun $n, s \geq N_\varepsilon$. Erityisesti on $|x_{n,k} - x_{s,k}| < \varepsilon$ kaikille $n, s \geq N_\varepsilon$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$. Mutta tämä merkitsee sitä, että $(x_{n,k})_n$ on Cauchyn jono reaaliakselilla $\mathbb{R}$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, on olemassa $x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k}$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi osoitetaan, että

$$d_p((x_{n,k})_n, (x_k)) \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Antamalla $s \rightarrow \infty$ epäyhtälössä (1) saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^j |x_{n,k} - x_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

kaikille $k, j \in \mathbb{N}$. Antamalla $j \rightarrow \infty$ ja huomaamalla, että $h(x) := x^{1/p}$ on jatkuva funktio, todetaan että

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^j |x_{n,k} - x_k|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^j |x_{n,k} - x_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_k|^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

jokaiselle $n \geq N_\varepsilon$. Mutta $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, josta haettu etäisyysraja-arvo heti seuraa.

Lopuksi pitää osoittaa, että näin saatu jono $(x_k) \in l^p$. Edellisen lemmän nojalla on olemassa indeksistä n riippumaton vakio $C > 0$ siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^p\right)^{1/p} \leq C.$$

Tällöin on

$$\left(\sum_{k=1}^j |x_{n,k}|^p\right)^{1/p} \leq C$$

kaikille $n, j \in \mathbb{N}$. Antamalla $n \rightarrow \infty$ saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^j |x_k|^p\right)^{1/p} \leq C$$

jokaiselle $j \in \mathbb{N}$. Antamalla lopuksi $j \rightarrow \infty$ todetaan, että

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq C,$$

toisin sanoen, että $(x_k) \in l^p$.

10 Normiavaruudet

10.1 Perusmääritelmät

Edellisissä luvuissa on tarkasteltu useita *normiavaruuksia*, vaikka normin käsitettä sinänsä ei olekaan vielä määritelty.

Määritelmä 10.1. Olkoon X annettu $\mathbb{F}$ -kertoiminen lineaariavaruus, missä $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ja olkoon $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ annettu kuvaus niin, että jokaiselle $x, y \in X$ ja jokaiselle $\alpha \in \mathbb{F}$ on voimassa

- (a) $\|x\| \geq 0$,
- (b) $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$,
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tällöin sanotaan, että kuvaus $\|\cdot\|$ on *normi* lineaariavaruudessa X ja $(X, \|\cdot\|)$ on *normiavaruus*.

Jos $\|x\| = 1$, sanotaan, että vektori $x \in X$ on *yksikkövektori*.

Huomautus. Heti alkuun on syytä huomauttaa siitä, että euklidisissä avaruuksissa $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ annettu euklidinen vektorin pituus toteuttaa normin määrittelevät aksiomat. Yleisemmin todetaan, että on voimassa seuraava

Lause 10.2. *Olkoon $\{e_1, \dots, e_n\}$ äärellisulotteisen $\mathbb{F}$ -kertoimisen lineaariavaruuden X kanta, jolloin jokaiselle pisteelle $x \in X$ saadaan yksikäsitteinen esitys $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, missä $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Tällöin kuvaus $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, jonka määrittelee*

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2},$$

on normi avaruudessa X .

Todistus. Oletetaan nyt, että $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$, missä jokainen $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{F}$, ja olkoon $\alpha \in \mathbb{F}$. Suoraan määritelmästä todetaan, että $\|x\| \geq 0$. Jos sitten $x = 0$, on $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, ja siis on $\|x\| = 0$. Jos kääntäen oletetaan, että $\|x\| = 0$, on tällöinkin $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, ja näin muodoin myös $x = 0$. Edelleen todetaan, että

$$\alpha x = \alpha \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j e_j.$$

Tällöin on

$$\|\alpha x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha \lambda_j|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \|x\|.$$

Kolmioepäyhtälön todistamiseksi todetaan lopuksi, käyttäen hyväksi Schwarzin epäyhtälöä, että

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) e_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j + \mu_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n (|\lambda_j| + |\mu_j|)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^n |\lambda_j| |\mu_j| + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |\mu_j|^2\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Esimerkki. Olkoon X annettu kompakti metrinen avaruus. Kuvaus $\|\cdot\| : \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään asettamalla $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, on normi (supremum-normi) funktioavaruudessa $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X)$. Määritelmän perusteella kuvaus on triviaalisti ei-negatiivinen. Samoin on triviaallia, että $\|f\| = 0$ jos ja vain jos f häviää identtisesti. Olkoon nyt $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X)$ ja $\alpha \in \mathbb{F}$. Tällöin on

$$\|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)|\} = |\alpha| \sup\{|f(x)|\} = |\alpha| \|f\|.$$

Kolmioepäyhtälön todistamiseksi todetaan ensin, että

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

kaikille $x \in X$. Mutta tällöin on

$$\|f + g\| = \sup\{|(f + g)(x)|\} \leq \|f\| + \|g\|.$$

Esimerkki. L^p -normi määritellään asettamalla

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p dm\right)^{1/p},$$

kun $1 \leq p < \infty$ ja

$$\|f\|_p = \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f|,$$

kun $p = \infty$.

Esimerkki. Vastaavasti määritellään l^p -normi asettamalla

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

kun $1 \leq p < \infty$ ja

$$\|(x_n)\|_p = \|(x_n)\|_\infty := \sup_n |x_n|,$$

kun $p = \infty$.

Esimerkki. Olkoot X ja Y $\mathbb{F}$ -kertoimisia lineaariavaruuksia ja $Z := X \times Y$ niiden karteesinen tulo. Jos nyt $\|\cdot\|_1$, vast. $\|\cdot\|_2$, on normi avaruudessa X , vast. avaruudessa Y , niin

$$\|(x, y)\| := \|x\|_1 + \|y\|_2$$

on normi tuloavaruudessa Z .

Lause 10.3. *Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus, jossa kuvaus $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ on määritelty asettamalla $d(x, y) := \|x - y\|$. Tällöin (X, d) on metrinen avaruus.*

Todistus. Lauseen todistus seuraa välittömästi normin määrittelevien ominaisuuksien perusteella.

Huomautus. Kun jatkossa normiavaruuden yhteydessä puhutaan metriikasta, tällöin tarkoitetaan aina edellä normin avulla määriteltä metriikkaa.

Lause 10.4. *Olkoot (x_n) ja (y_n) normiavaruuden $(X, \|\cdot\|)$ jonoja, jotka supenevat, vastaavasti, kohti pisteitä $x, y \in X$, ja olkoon (α_n) jono kerroinkunnassa $\mathbb{F}$, joka supenee vastaavasti kohti pistettä $\alpha \in \mathbb{F}$. Silloin on voimassa:*

(a) $\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|,$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|,$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y,$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x.$

Todistus. (a) Kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

josta seuraa $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Vaihtamalla x ja y saadaan $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, josta kohdan (a) väite seuraa.

(b) Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, saadaan raja-arvon määritelmän ja kolmioepäyhtälön avulla

$$|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\| < \varepsilon$$

aina, kun $n \geq N = N_\varepsilon$. Mutta tämä merkitsee sitä, että kohdan (b) väite on voimassa.

(c) Tämä kohta todistetaan täsmälleen kuten vastaava perusanalyysin lause.

(d) Koska jono (α_n) suppenee, jono on rajoitettu, ja on siis olemassa $K > 0$ siten, että $|\alpha_n| \leq K$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Mutta tällöin on

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\|$$

$$\leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \leq K \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|,$$

josta väite heti seuraa.

Seuraavassa tarkastellaan lähemmin äärellisulotteisia lineaariavaruuksia. Lauseen 10.2 nojalla tiedetään, että tällaiseen avaruuteen voidaan aina määritellä normi, joka kuitenkin riippuu ko. avaruuden kannan valinnasta. Tämä tietenkin viittaa siihen, että samassa avaruudessa voi olla määriteltynä useita normeja. Itseasiassa, olemme jo todenneet, että esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on määritelty (ainakin) kaksi eri normia, nimittäin tavanomainen euklidinen normi $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ sekä sivun 75 esimerkissä määritelty summanormi $\|(x, y)\| := |x| + |y|$. Heti voidaan todeta, että näitä normeja vastaavat tason yksikköpallot ovat eri joukkoja. Kuitenkin on mahdollista, että eri normien määrittelemät metriikat indusoivat avaruuteen X saman topologian, jolloin esimerkiksi raja-arvo-ominaisuudet ovat samat, ks. myöhemmin Lause 10.X. Tätä tarkoitusta varten määritellään normien ekvivalenttisuuden käsite:

Määritelmä 10.5. Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ kaksi normia lineaariavaruudessa X . Nämä normit ovat ekvivalentit, jos on olemassa luvut $M > 0$, $m > 0$ niin, että

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

on voimassa kaikille $x \in X$.

Esimerkkinä normien ekvivalenssista osoitetaan, että edellä mainitut kaksi euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ normia $\|(x, y)\|_1 := \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\|(x, y)\|_2 := |x| + |y|$ ovat ekvivalentit osoittamalla, että

$$\|(x, y)\|_1 \leq \|(x, y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_1$$

kaikille $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Koska

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

mistä ensimmäinen epäyhtälö heti seuraa.

Toisaalta on

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2,$$

joten $2|x||y| \leq |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$. Mutta tällöin on $x^2 + 2|x||y| + y^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ ja siis $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Huomautus. Normien ekvivalenssi on ekvivalenssirelaatio, mikä on välittömästi todettavissa.

Lemma 10.6. *Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ kaksi normia lineaariavaruudessa X ja d_1, d_2 näitä vastaavat metriikat $d_j := \|\cdot\|_j$, $j = 1, 2$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa $K > 0$ siten, että $\|x\|_1 \leq K\|x\|_2$ kaikille $x \in X$ ja että (x_n) on vektori-jono avaruudessa X .*

(a) Jos (x_n) suppenee kohti vektoria x metrisessä avaruudessa (X, d_2) , niin (x_n) suppenee kohti vektoria x myös avaruudessa (X, d_1) .

(b) Jos (x_n) on Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (X, d_2) , niin sama pätee myös metrisessä avaruudessa (X, d_1) .

Todistus. (a) Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, on olemassa luonnollinen luku N siten, että $\|x_n - x\|_2 < \varepsilon/K$ aina, kun $n \geq N$. Mutta tällöin on

$$\|x_n - x\|_1 \leq K\|x_n - x\|_2 < K\varepsilon/K = \varepsilon$$

ja siis $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.

Kohta (b) todistetaan täysin vastaavalla tavalla.

Lause 10.7. *Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentteja normeja lineaariavaruudessa X , ja olkoot d_1, d_2 sanottujen normien määrittämät metriikat. Olkoon edelleen (x_n) annettu jono avaruudessa X . Tällöin:*

(a) *Jono (x_n) suppenee kohti pistettä $x \in X$ metrisessä avaruudessa (X, d_1) jos ja vain jos sama pätee myös avaruudessa (X, d_2) .*

(b) *Jono (x_n) on Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (X, d_1) jos ja vain jos sama pätee metrisessä avaruudessa (X, d_2) .*

(c) *Metriken avaruus (X, d_1) on täydellinen jos ja vain jos (X, d_2) on täydellinen.*

Todistus. Koska annetut normit ovat ekvivalentteja, on olemassa vakiot $m > 0$, $M > 0$ siten, että

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

jokaiselle $x \in X$.

(a) Oletetaan aluksi, että $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Koska $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ kaikille $x \in X$, on edellisen lemmän kohdan (a) nojalla $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Jos kääntäen oletetaan, että $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, todetaan epäyhtälön $\|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2$ perusteella, että $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, samoin edellisen lemma (a)-kohdan nojalla.

(b) Väitteen (b)-kohta todistetaan vastaavalla tavalla nojautuen edellisen lemmän kohtaan (b).

(c) Olkoon (X, d_1) täydellinen ja olkoon (x_n) Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (X, d_2) . Kohdan (b) nojalla (x_n) on Cauchyn jono myös metrisessä avaruudessa (X, d_1) , jonka avaruuden täydellisyyden nojalla (x_n) suppenee

kohti jotakin pistettä $x \in X$. Mutta tällöin (X, d_2) on täydellinen. Väite todistetaan toiseen suuntaan vaihtamalla d_1 ja d_2 .

Seuraavaksi osoitetaan, että äärellisulotteisessa lineaariavaruudessa normi on olennaisesti yksikäsitteinen, ts. kaikki normit ovat ekvivalentteja.

Lause 10.8. *Olko $(X, \mathbb{F})$ äärellisulotteinen lineaariavaruus varustettuna normilla $\|\cdot\|_1$. Olko edelleen $\{e_1, \dots, e_n\}$ lineaariavaruuden X (jokin) kanta ja olko*

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2}$$

edellä annetun kannan määrittelemä normi lineaariavaruudessa X , ks. Lause 10.2. Tällöin normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja.

Todistus. Todistus nojautuu suoraan Määritelmään 10.5. Asetetaan aluksi

$$M := \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_1^2 \right)^{1/2}.$$

Selvästi on $0 < M < \infty$. Edelleen, nojautuen Schwarzin epäyhtälöön saadaan jokaiselle $x \in X$

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n \|\lambda_j e_j\|_1 \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|e_j\|_1 \leq \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_1^2 \right)^{1/2} = M \|x\|_2, \end{aligned}$$

mikä todistaa jälkimmäisen epäyhtälön määritelmästä 10.5.

Ensimmäisen epäyhtälön todistamiseksi määritellään apufunktio $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(a) := \left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_1$$

jokaiselle $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ ja osoitetaan, että funktio f on jatkuva (euklidisen metriikan suhteen sekä määrittely- että maaliavaruudessa). Olkoon tätä varten $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ mielivaltainen ja olkoon $(b_k) = ((b_{k,1}, \dots, b_{k,n}))_k \subset \mathbb{F}^n$ pistejono, joka suppenee kohti pistettä a , ts. $d_n(b_k, a) = (\sum_{j=1}^n |b_{k,j} - a_j|^2)^{1/2} \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Mutta tällöin on $|b_{k,j} - a_j| \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, jokaiselle $j = 1, \dots, n$. Palauttamalla nyt mieleen Lause 10.4 todetaan, että

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b_k)| &= \left| \left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_1 - \left\| \sum_{j=1}^n b_{k,j} e_j \right\|_1 \right| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^n (a_j - b_{k,j}) e_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |a_j - b_{k,j}| \|e_j\|_1 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$. Tällöin f on jatkuva pisteessä a Lauseen 4.4 nojalla, ja pisteen a mielivaltaisuuden nojalla siis jatkuva koko avaruudessa $\mathbb{F}^n$.

Tarkastellaan seuraavaksi avaruuden $\mathbb{F}^n$ yksikköpallon reunaa

$$S := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{j=1}^n |a_j|^2 = 1\}.$$

Joukko S on suljettu ja rajoitettu ja siis Heine-Borelin lauseen (Lause 4.20) nojalla kompakti. Mutta tällöin Lauseen 5.1 nojalla on olemassa $c = (c_1, \dots, c_n) \in S$ siten, että

$$m := f(c) \leq f(a)$$

kaikille $a \in S$. Jos $m = 0$, niin funktion f määrittelyn nojalla $\left\| \sum_{j=1}^n c_j e_j \right\|_1 = 0$ ja siis $\sum_{j=1}^n c_j e_j = 0$. Mutta vektorit e_j ovat kantavektoreina lineaarisesti riippumattomia ja näin ollen on $c_1 = \dots = c_n = 0$ ja siis $c = 0$, mikä on mahdotonta, koska $c \in S$. Voidaan siis olettaa, että $m > 0$. Jos nyt tarkastellaan vektoria $y = \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$, jolle pätee $\|y\|_2 = (\sum_{j=1}^n |\mu_j|^2)^{1/2} = 1$, niin $\mu \in S$. Mutta tällöin on $m \leq f(y) = \left\| \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\|_1 = \|y\|_1$. Jos nyt on $x \neq 0$ on mielivaltainen, niin on $\|x/\|x\|_2\|_2 = 1$, jolloin äskeisen perusteella $\|x/\|x\|_2\|_1 \geq m$. Mutta tästä seuraa välittömästi haettu epäyhtälö $\|x\|_1 \geq m\|x\|_2$. Lopuksi todetaan, että tämä epäyhtälö on triviaalisti voimassa, jos $x = 0$.

Seuraus 10.9. *Äärellisulotteisen lineaariavaruuden kaikki normit ovat parittain ekvivalentteja.*

Todistus. Edellisen lauseen nojalla mitkä hyvänsä kaksi normia ovat ekvivalentteja normin $\|\cdot\|_2$ kanssa, josta väite heti seuraa.

Lemma 10.10. *Olkoon $(X, \mathbb{F})$ on äärellisulotteinen lineaariavaruus, $\{e_1, \dots, e_n\}$ sen kanta, $\|\cdot\|_2$ kyseisen kannan määrittelemä normi (Lause 10.2) ja d tätä normia vastaava metriikka. Tällöin (X, d) täydellinen metrinen avaruus.*

Todistus. Olkoon (x_k) Cauchyn jono avaruudessa (X, d) ja olkoon $\varepsilon > 0$. Jonon (x_k) pisteet voidaan annetun kannan avulla esittää muodossa $x_k = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,k} e_j$. Koska (x_k) on oletuksen nojalla Cauchyn jono, niin on olemassa luonnollinen luku $N = N_\varepsilon$ siten, että jokaiselle $1 \leq j \leq n$ pätee

$$|\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 = \|x_k - x_m\|^2 < \varepsilon^2$$

aina, kun $k, m \geq N$. Mutta tämä merkitsee sitä, että jokainen jono $(\lambda_{j,k})_k$, $1 \leq j \leq n$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{F}$. Koska kerroinkunta $\mathbb{F}$, joka on $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, on euklidisena metrisenä avaruutena täydellinen, on olemassa vakiot $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ siten, että $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{j,k} = \lambda_j$, $j = 1, \dots, n$. Mutta tällöin voidaan valita luonnolliset luvut $N_j = N_j(\varepsilon)$ siten, että

$$|\lambda_{j,k} - \lambda_j| < \varepsilon / \sqrt{n}$$

aina, kun $k \geq N_j$. Asetetaan nyt $N_0 = \max\{N_1, \dots, N_n\}$ ja määritellään $x := \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Jos nyt $k \geq N_0$, niin on

$$\|x_k - x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,k} - \lambda_j|^2 < \varepsilon^2,$$

joten jono (x_k) suppenee kohti pistettä x , ja siis X on täydellinen.

Lause 10.11. *Jos $(X, \|\cdot\|)$ on äärellisulotteinen normiavaruus, niin kyseisen normin määrittelemä metrinen avaruus (X, d) on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $\|\cdot\|_2$ Lauseessa 10.2 määritelty normi avaruudessa X . Tällöin normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja. Edellisen lauseen perusteella normia $\|\cdot\|_2$ vastaava metrinen avaruus on täydellinen. Lauseen 10.7 nojalla myös normia $\|\cdot\|$ vastaava metrinen avaruus on täydellinen.

10.2 Banach-avaruudet

Määritelmä 10.12. Normiavaruus, joka on täydellinen normin määrittelemän metriikan suhteen, on Banach-avaruus.

Huomautus. Juuri äsken todistetun perusteella tiedetään, että jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on Banach-avaruus. Samoin todetaan heti Lauseen 9.15 nojalla, että avaruus L^p , $1 \leq p \leq \infty$, on Banach-avaruus, ja Lauseen 9.21 perusteella samoin on avaruus l^p . Esimerkki Banach-avaruudesta, joka olla ääretönulotteinen, on kompaktissa metrisessä avaruudessa annettu jatkuvien funktioiden avaruus $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$ varustettuna supremum-normilla, ks. Lause 5.6.

Banach-avaruuksien analyysi muistuttaa monessa suhteessa tavanomaista alkeisanalyysiä. Esimerkkinä tarkastellaan tilannetta, joka vastaa itseisen suppenemisen käsitettä alkeisanalyysissä.

Määritelmä 10.13. Olkoon (x_n) jono vektoreita normiavaruudessa $(X, \|\cdot\|)$ ja jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ merkitään $s_k := \sum_{n=1}^k x_n$. Sarja $\sum_{n=1}^\infty x_n$ suppenee, jos $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k \in X$ on olemassa ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^\infty x_n := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k.$$

Lause 10.14. Olkoon (x_n) jono vektoreita Banach-avaruudessa $(X, \|\cdot\|)$. Jos normien muodostama sarja $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ suppenee, niin myös sarja $\sum_{n=1}^\infty x_n$ suppenee.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja merkitään $s_k := \sum_{n=1}^k x_n$, $r_k := \sum_{n=1}^k \|x_n\|$. Koska normien muodostama sarja suppenee oletuksen perusteella, niin jono (r_k) on Cauchyn jono reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Tällöin on olemassa luonnollinen luku N siten, että

$$|r_k - r_m| = \sum_{n=m+1}^k \|x_n\| < \varepsilon$$

aina, kun $k > m \geq N$. Kolmioepäytälön nojalla on

$$\|s_k - s_m\| = \left\| \sum_{n=m+1}^k x_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^k \|x_n\| < \varepsilon.$$

Tämä merkitsee sitä, että jono (s_k) on Cauchyn jono, joka tällöin suppenee, koska X on oletuksen nojalla täydellinen. Edellisen määritelmän nojalla väite seuraa välittömästi.

11 Sisätuloavaruudet

Määritelmä 11.1. Bilineaarimuoto lineaariavaruudessa $(X, \mathbb{F})$ tarkoittaa kuvausta $F : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

$$(B1) \quad F(x, y + z) = F(x, y) + F(x, z),$$

$$(B2) \quad F(x + y, z) = F(x, z) + F(y, z),$$

$$(B3) \quad F(\alpha x, y) = \alpha F(x, y),$$

$$(B4) \quad F(x, \alpha y) = \overline{\alpha} F(x, y)$$

jokaiselle $x, y, z \in X$ ja jokaiselle $\alpha \in \mathbb{F}$.

Bilineaarimuodon F sanotaan olevan *ei-negatiivinen*, jos $F(x, x) \geq 0$ jokaiselle $x \in X$, ja *positiivisesti definiitti*, jos F on ei-negatiivinen ja $x = 0$ aina, kun $F(x, x) = 0$. Edelleen, F on symmetrinen, jos $F(x, y) = \overline{F(y, x)}$ jokaiselle $x, y \in X$.

Huomautus. Jos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on bilineaarimuoto F lineaarinen molempien argumenttiensa suhteen. Sitä vastoin, jos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, lineaarisuus on voimassa vain ensimmäisen argumentin suhteen, ja F on *antilineaarinen* toisen argumentin suhteen.

Määritelmä 11.2. Jos lineaariavaruudessa $(X, \mathbb{F})$ määritelty bilineaarimuoto F on symmetrinen ja positiivisesti definiitti, sanotaan, että F on *sisätulo* ja merkitään $F(x, y) = \langle x, y \rangle$. Edelleen, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on *sisätuloavaruus*.

Esimerkki. Tarkastellaan funktioavaruutta $L^2(\mathbb{R})$ ja määritellään $\langle f, g \rangle = \int fg dm$. Näin määriteltynä $(L^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on sisätuloavaruus, mikä helposti todetaan seuraavalla tavalla:

Olkoot $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\int |fg| dm \leq \left(\int f^2 dm \right)^{1/2} \left(\int g^2 dm \right)^{1/2} < \infty,$$

joten edellä annettu sisätulo on hyvin määritelty. Sisätulon määrittelevät ominaisuudet todetaan helposti voimassa oleviksi:

Ensinnä, $\langle f, f \rangle = \int f^2 dm \geq 0$ triviaalisti ja jos $\langle f, f \rangle = 0$, niin $f = 0$ m.k. ja siis on $f = 0$, kun muistetaan avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ määrittelyn sisältämä funktioiden jako ekvivalenssiluokkiin sen perusteella, että saman luokan funktiot eivät poikkea toisistaan nollamittaisen joukon ulkopuolella. Bilinearisuus seuraa suoraan integraalin lineaarisuudesta ja symmetrisyys on triviaalisti voimassa.

Lause 11.3. (*Schwarzin epäyhtälö*) *Sisätuloavaruudessa $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on voimassa*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}$$

kaikille $x, y \in X$. Yhtäsuuruus on Schwarzin epäyhtälössä voimassa jos ja vain jos x ja y ovat lineaarisesti riippuvia.

Todistus. Väitteet todistetaan osoittamalla, että jokaista $x, y \in X$ vastaa $\alpha \in \mathbb{F}$ siten, että

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle y - \alpha x, y - \alpha x \rangle \langle x, x \rangle.$$

Jos nimittäin $x = 0$, voidaan valita $\alpha = 0$. Tällöin nimittäin yhtälön oikea puoli häviää, kun vasemmalta puolelta saadaan

$$|\langle x, y \rangle|^2 = |\langle 0, y \rangle|^2 = |\langle 0 \cdot z, y \rangle|^2 = 0 \cdot |\langle z, y \rangle|^2 = 0,$$

olipa $z \in X$ mikä piste hyvänsä.

Jos taas $x \neq 0$, on myös $\langle x, x \rangle \neq 0$ ja voidaan asettaa $\alpha = \langle y, x \rangle / \langle x, x \rangle$. Mutta tällöin on

$$\begin{aligned} \langle y - \alpha x, y - \alpha x \rangle &= \langle y, y \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \bar{\alpha} \langle y, x \rangle - \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} \\ &= \langle y, y \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle}, \end{aligned}$$

josta molemmat väitteet välittömästi seuraavat.

Lause 11.4. Olkoon $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätuloavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{F}$, ja määritellään $\|x\| := (\langle x, x \rangle)^{1/2}$. Tällöin $(X, \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

Todistus. Määritelmän perusteella on selvää, että $\|x\| \geq 0$ ja että $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$. Edelleen todetaan heti, että

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \|x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2,$$

joten $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ jokaiselle $x \in X$ ja jokaiselle $\alpha \in \mathbb{F}$. Kolmioepäyhtälön todistamiseksi sovelletaan Schwarzin epäyhtälöä, jolloin saadaan jokaiselle $x, y \in X$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

josta normikolmioepäyhtälö suoraan seuraa.

Huomautus. Edelliseen liittyen on syytä huomata, että käänteinen tulos ei ole voimassa, ts. normiavuuden normia ei aina ole mahdollista muodostaa sisätuloavaruuden sisätulosta edellisen lauseen määrittelemällä tavalla. Tähän palataan hiukan myöhemmin.

Määritelmä 11.5. $\mathbb{F}$ -kertoiminen sisätuloavaruus $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, jonka määräämä normiavaruus $(X, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus, on Hilbert-avaruus.

Lause 11.6. (Suunnikassääntö) Olkoon $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\mathbb{F}$ -kertoiminen sisätuloavaruus. Tällöin jokaiselle $x, y \in X$ on voimassa suunnikassääntö

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Todistus. Suoraan määritelmien ja bilineaarisuuden perusteella todetaan

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Lause 11.7. (*Polarisaatiosääntö*) (a) Jos $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on reaalikertominen sisätuloavaruus, niin jokaiselle $x, y \in X$ on voimassa

$$\langle x, y \rangle = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2.$$

(b) Jos $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ on kompleksikertominen sisätuloavaruus, niin jokaiselle $x, y \in X$ on voimassa

$$\langle x, y \rangle = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 + i \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - i \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2.$$

Todistus. Rajoitutaan todistamaan väite ainoastaan reaalikertoimisessa tapauksessa. Kuten edellisessäkin lauseessa, suoralla laskulla todetaan, että

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\
&= 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle = 4\langle x, y \rangle,
\end{aligned}$$

koska kyseessä on reaalikertominen sisätuloavaruus.

Lause 11.8. Funktioavaruuden $\mathcal{C}([0, 1])$ supremum-normi $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ ei ole sisätulon määräämä Lauseen 11.4 esittämällä tavalla.

Todistus. Tarkastellaan funktioita $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$, jotka määritellään asettamalla $f(x) = 1$, $g(x) = x$ jokaiselle $x \in [0, 1]$. Tällöin todetaan heti, että

$$\|f\| = \sup\{f([0, 1])\} = 1,$$

$$\|g\| = \sup\{g([0, 1])\} = 1,$$

$$\|f + g\| = \sup\{(f + g)([0, 1])\} = 2$$

ja

$$\|f - g\| = \sup\{(f - g)([0, 1])\} = 1.$$

Nyt todetaan heti, että suunnikassääntö (Lause 11.6) ei ole voimassa, joten annettua normia ei voida konstruoida mistään sisätulosta.

Lopuksi todetaan, että suunnikassäännön voimassaolo on itse asiassa yhtäpitävää sen kanssa, että normiavuus voidaan esittää sisätuloavuutena. Tätä varten tarvitaan aluksi seuraava

Lemma 11.9. *Sisätuloavuuden $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätulo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ on jatkuva, kun X varustetaan sisätulon (normin kautta) määräämällä topologialla (ja topologia $\mathbb{F}$:ssä on tavallinen euklidinen topologia).*

Todistus. Jos $x_0, y_0 \in X$, niin

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &\leq |\langle x, y \rangle - \langle x, y_0 \rangle| + |\langle x, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \\ &= |\langle x, y - y_0 \rangle| + |\langle x - x_0, y_0 \rangle| \leq \|x\| \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \|y_0\|, \end{aligned}$$

josta jatkuvuusväite helposti seuraa.

Lause 11.10. *Jos normiavuudessa $(X, \|\cdot\|)$ on voimassa suunnikassääntö, niin on olemassa sisätulo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ siten, että jokaiselle $x \in X$ on voimassa $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.*

Todistus. Rajoitutaan seuraavassa todistamaan väite tapauksessa $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Tällöin määritellään

$$\langle x, y \rangle := \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2$$

ja osoitetaan, että näin määritelty kuvaus todella on sisätulo, joka toteuttaa lauseessa vaaditun ehdon. Itse asiassa, vaadittu ehto on triviaalisti voimassa, ja se, että $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on positiivisesti definiitti, on myös välittömästi todettavissa.

Samoin symmetrisyys on välitön seuraus siitä, että normi $\|x\| = \|-x\|$. Sitävastoin bilineaarisuuden todistaminen on vähemmän suoraviivainen asia.

Olko nyt $x, y, z \in X$. Tällöin on suunnikassäännön nojalla

$$2\|x+y\|^2 + 2\|z+y\|^2 = \|x+z+2y\|^2 + \|x-z\|^2$$

ja

$$2\|x-y\|^2 + 2\|z-y\|^2 = \|x+z-2y\|^2 + \|x-z\|^2.$$

Vähentämällä jälkimmäinen yhtälö edellisestä saadaan

$$2(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + 2(\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2) = \|x+z+2y\|^2 - \|x+z-2y\|^2.$$

Mutta kuvauksen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ määrittelyn perusteella tämä merkitsee sitä, että

$$\langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x+z, 2y \rangle.$$

Eritoten valitsemalla $z = 0$ todetaan, että

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x, 2y \rangle.$$

Yhdistämällä kaksi edellistä yhtäsuuruutta todetaan kaikille $u, v, y \in X$, että

$$\langle u+v, y \rangle = \frac{1}{2} \langle u+v, 2y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle v, y \rangle$$

ja siis ”sisätulo” on additiivinen ensimmäisen argumenttinsa suhteen. Koska kerroinkunta on reaalilukujen kunta, on $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, josta välittömästi seuraa additiivisuus toisenkin argumentin suhteen.

Vielä on todistettava, että jokaiselle $x, y \in X$ ja jokaiselle $a \in \mathbb{R}$ on $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$. Edellä tämä jo todettiin tapauksessa $a = 2$, ja additiivisuuden nojalla väite pätee kaikille luonnollisille luvuille a . Jos sitten oletetaan, että $n \neq 0$, on

$$n \langle \frac{1}{n}x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

ja siis

$$\left\langle \frac{1}{n}x, y \right\rangle = \frac{1}{n} \langle x, y \rangle.$$

Mutta tällöin additiivisuuden nojalla väite päötee kaikille rationaaliluvuille a . Edellisen lemmän nojalla ”sisätulo” on jatkuva kuvaus, koska se on määritelty kahden normin summana. Esittämällä nyt irrationaaliluku a rationaalilukujen jonon raja-arvona seuraa väite ”sisätulon” jatkuvuudesta, ja näin ollen kyseessä on todella sisätulo.

Lopuksi tarkastellaan lyhyesti sisätuloavaruuksien erästä olennaista käsitettä, nimittäin vektorien kohtisuoruutta.

Määritelmä 11.11. F -kertoimisen sisätuloavaruuden $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vektorit x, y ovat keskenään kohtisuorat eli ortogonaaliset, jos $\langle x, y \rangle = 0$. Tällöin merkitään $x \perp y$.

Lause 11.12. (a) Jos $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on reaalikertoiminen sisätuloavaruus, niin $x \perp y$ jos ja vain jos

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(b) Jos $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on kompleksikertoiminen sisätuloavaruus, niin $x \perp y$ jos ja vain jos

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ja

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

12 Lineaariset operaattorit

Tässä viimeisessä, lyhyessä luvussa tarkastellaan lineaarikuvauksia $T : X \rightarrow Y$, missä sekä X että Y ovat normiavaruuksia samassa kerroinkunnassa $\mathbb{F}$. Sitävastoin normien ei tarvitse olla samat, vaikka molempien avaruuksien normeille käytetään samaa merkintää $\|\cdot\|$. Kuvauksen lineaarisuus tietenkin tarkoittaa sitä, että

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$

kaikille $x, y \in X$ ja kaikille $a, b \in \mathbb{F}$. Lineaarikuvausten yhteydessä käytetään yleisesti merkintää $Tx := T(x)$. Edellä tarkasteltujen lineaarikuvausten joukolle käytetään merkintää $L(X, Y)$ ja jos $X = Y$, $L(X)$. Tällaiselle lineaarikuvaukselle määritellään niin sanottu *operaattorinormi* asettamalla

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Lineaarikuvaus $T \in L(X, Y)$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

jokaiselle $x \in X$. Rajoitettujen lineaarikuvausten $T : X \rightarrow Y$ perheelle käytetään merkintää $B(X, Y)$ ja vastaavasti $B(X)$, Jos $X = Y$.

Huomautus. Suoraan rajoitetun kuvauksen ja operaattorinormin määritelmistä seuraa, että $\|T\| \leq M$ jokaiselle luvulle $M > 0$, jota voidaan käyttää rajoitetun lineaarikuvauksen määritelmässä. Jos toisaalta on olemassa $x \neq 0$ siten, että $\|Tx\| = M\|x\|$, voidaan heti johtaa käännteinen epäyhtälö. Nimittäin, $\|x/\|x\|\| = 1$, jolloin

$$\|T\| \geq \|T(x/\|x\|)\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| = M.$$

Lemma 12.1. *Jos $T : X \rightarrow Y$ on rajoitettu lineaarikuvaus jos ja vain jos jokaiselle Cauchyn jonolle (x_n) on myös (Tx_n) Cauchyn jono.*

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa välittömästi rajoitetun kuvauksen määritelmästä.

Olettakaamme toisaalta, että T ei ole rajoitettu kuvaus. Tällöin on olemassa jono (x_n) siten, että

$$\|Tx_n\| > n^2\|x_n\|$$

jokaiselle luonnolliselle luvulle n . Tarkastellaan nyt jonoa (y_n) , joka määritellään asettamalla $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Tällöin $\|y_n\| = 1/n \rightarrow 0$, ja näin ollen (y_n) suppenee (kohti vektoria 0) ja on siis Cauchyn jono. Mutta edelleen

$$\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n^2\|x_n\|}{n\|x_n\|} = n,$$

ja siis kuvajono ei ole Cauchyn jono, mikä todistaa käänteisen väitteen. $\square$

Lineaarikuvauksen rajoittuneisuus voidaan karakterisoida monin eri tavoin, joista tärkeimmät sisältyvät seuraavaan lauseeseen:

Lause 12.2. *Lineaarikuvaukselle $T : X \rightarrow Y$ seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

- (a) T on tasaisesti jatkuva,
- (b) T on jatkuva,
- (c) T on jatkuva pisteessä $0 \in X$,
- (d) on olemassa luku $M > 0$ siten, että $\|Tx\| \leq M$ aina, kun $\|x\| \leq 1$,
- (e) on olemassa luku $M > 0$ siten, että $\|Tx\| \leq M\|x\|$ jokaiselle $x \in X$.

Todistus. Aluksi todetaan, että (a) $\Rightarrow$ (b) ja (b) $\Rightarrow$ (c) ovat triviaalisti voimassa.

(c) $\Rightarrow$ (d). Koska $T0 = 0$ ja T on oletuksen mukaan jatkuva pisteessä $x = 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\|Tx\| < 1$ aina, kun $\|x\| < \delta$. Olkoon nyt $y \in X$ valittu mielivaltaisesti niin, että $\|y\| \leq 1$. Koska

$$\left\| \frac{\delta y}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} \|y\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$

on

$$\|T(\frac{\delta y}{2})\| = \|\frac{\delta}{2}Ty\| = \frac{\delta}{2}\|Ty\| < 1$$

,

ja näin ollen $\|Ty\| < \frac{2}{\delta}$. Näin ollen, kohdan (d) ehto pätee arvolla $M = \frac{2}{\delta}$.

(d) $\Rightarrow$ (e). Olkoon $M > 0$ kohdassa (d) annettu luku. Koska $T0 = 0$, on $\|T0\| \leq M\|0\|$ voimassa triviaalisti. Olkoon nyt $x \neq 0$ mielivaltainen. Tällöin $\|x/\|x\|\| = 1$, ja siis oletuksen nojalla

$$\|T(x/\|x\|)\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leq M$$

ja siis $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

(e) $\Rightarrow$ (a). Kuvauksen T lineaarisuuden ja oletuksen nojalla

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq M\|x - y\|$$

kaikille $x, y \in X$. Olkoon nyt $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta = \varepsilon/M$. Jos nyt $x, y \in X$ ja $\|x - y\| < \delta$, on edellisen nojalla

$$\|Tx - Ty\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

joten kuvaus T on tasaisesti jatkuva. □

Esitetään seuraavaksi joukko esimerkkejä, jotka (toivottavasti) valaisevat lineaarikuvauksen käsitettä.

Esimerkki. Kuvaus $T : \mathcal{C}_{\mathbb{F}}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{F}$, jonka määrittelee $Tf := f(0)$, on lineaarinen ja jatkuva, kun $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}([0, 1])$ on varustettu supremum-normilla. Lineaarisuus todetaan heti, sillä

$$T(af_1 + bf_2) = (af_1 + bf_2)(0) = af_1(0) + bf_2(0) = aTf_1 + bTf_2.$$

Jatkuvuus taas seuraa siitä, että

$$|Tf| = |f(0)| \leq \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\} = \|f\|.$$

Lemma 12.3. Jos $(c_n) \in \uparrow^\infty(\mathbb{R})$ ja $(x_n) \in \uparrow^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, niin jono $(c_n x_n) \in \uparrow^p(\mathbb{R})$ ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p \leq \|c_n\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Todistus. Oletuksen nojalla

$$\lambda := \|(c)\|_\infty = \sup\{|c_n| | n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

ja $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Koska jokaiselle luonnolliselle luvulle n on $|c_n x_n|^p \leq \lambda^p |x_n|^p$, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla ja siis $(c_n x_n) \in \uparrow^p(\mathbb{R})$.

Esimerkki. Jos $(c_n) \in \uparrow^\infty(\mathbb{R})$, niin kuvaus $T : \uparrow^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, jonka määrittelee yhtälö

$$T((x_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

on lineaarinen ja jatkuva. aluksi todetaan, että edellisen lemmän nojalla kuvaus T on hyvin määritelty, sillä $(c_n x_n) \in \uparrow^1(\mathbb{R})$, joten kuvauksen määrittelevä sarja suppenee. Lineaarisuuden todistamiseksi olkoot $(x_n), (y_n) \in \uparrow^1(\mathbb{R})$ ja $a, b \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia. Tällöin on

$$T(a(x_n) + b(y_n)) = T((ax_n + by_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(ax_n + by_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ac_n x_n + bc_n y_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n + b \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n = aT((x_n)) + bT((y_n)),$$

ja siis T on lineaarinen. Jatkuvuuden todistamiseksi olkoon $(x_n) \in \uparrow^1(\mathbb{R})$, jolloin

$$|T((x_n))| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|$$

$$\leq \| (c_n) \|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \| (c_n) \|_\infty \| (x_n) \|_1,$$

joten kuvaus T on rajoitettu ja siis Lemman 12.1 nojalla jatkuva.

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P}$ lineaariavaruuden $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$, varustettuna supremum-normilla, polynomien muodostama lineaarinen aliavaruus. Olkoon edelleen $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ kuvaus, jonka määrittelee derivaatta $T(p) := p'$. Kuvaus T on lineaarinen, mutta ei ole jatkuva. Lineaarisuus on triviaali johtuen derivaattakuvauksen lineaarisuudesta. Kuvauksen epäjatkuvuuden todistamiseksi tarkastellaan potenssipolynomeja p_n , jotka määritellään asettamalla $p_n(t) = t^n$. Tällöin on

$$\|p_n\| = \sup\{|p_n[0, 1]|\} = \sup\{t^n | t \in [0, 1]\} = 1.$$

Toisaalta,

$$\|Tp_n\| = \|p'\| = \sup\{nt^{n-1} | t \in [0, 1]\} = n.$$

mutta tällöin on selvää, että ei ole olemassa lukua $M > 0$ niin, että $\|Tp\| \leq M\|p\|$ olisi voimassa kaikille polynomeille $p \in \mathcal{P}$. Näin ollen, kuvaus T ei ole rajoitettu, eikä siis ole jatkuva Lemman 6.1 nojalla.

Esimerkki. Olkoon $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva funktio tason $\mathbb{R}^2$ neliössä $[a, b] \times [a, b]$ ja olkoon M funktion $|k|$ supremum kyseisessä neliössä. Jatkuvuuden ja neliön kompaktisuuden nojalla M on ei-negatiivinen reaaliluku.

Jos nyt $g \in \mathcal{C}([a, b])$, niin $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ määriteltynä yhtälöllä

$$f(s) := \int_a^b k(s, t)g(t)dt$$

myös kuuluu avaruuteen $\mathcal{C}([a, b])$. Tämän todistamiseksi olkoon $\varepsilon > 0$ annettu ja samoin $s \in [a, b]$, molemmat mielivaltaisesti ja määritellään funktio $k_s \in \mathcal{C}([a, b])$ asettamalla $k_s(t) := k(s, t)$. Määrittelyneliön $[a, b] \times [a, b]$ kompaktisuuden nojalla k on tasaisesti jatkuva kyseisessä neliössä, joten on olemassa $\delta > 0$ niin, että $|k_s(t) - k_{s'}(t)| < \varepsilon$ jokaiselle $t \in [a, b]$ aina, kun $|s - s'| < \delta$. Mutta tällöin on

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(s')| &= \left| \int_a^b (k(s, t) - k(s', t))g(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)||g(t)|dt = \int_a^b |k_s(t) - k_{s'}(t)||g(t)|dt \\
&\leq \varepsilon \int_a^b |g(t)|dt \leq \varepsilon \sup\{|g[a, b]|\} \int_a^b dt = \varepsilon(b-a)\|g\|,
\end{aligned}$$

mikä todistaa funktion f jatkuvuuden.

Määritellään edelleen lineaarikuvaus $K : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ yhtälöllä

$$(K(g))(s) := \int_a^b k(s, t)g(t)dt.$$

Tällöin K on rajoitettu kuvaus ja $\|K(g)\| \leq M(b-a)\|g\|$. Tämä seuraa helposti, sillä

$$|(K(g))(s)| \leq \int_a^b |k(s, t)g(t)|dt \leq \int_a^b M\|g\|dt = M(b-a)\|g\|.$$

Mutta tällöin $\|K(g)\| = \sup\{|(K(g))(s)| : s \in [a, b]\} \leq M(b-a)\|g\|$.

Jos palautetaan mieleen äärellisulotteisten normiavaruuksien se erikoinen ominaisuus, että ne ovat aina täydellisiä, on luonnollista kysyä, ovatko mahdollisesti äärellisulotteisten normiavaruuksien väliset lineaarikuvaukset aina jatkuvia? Näin itse asiassa on:

Lause 12.4. *Olkoon X äärellisulotteinen normiavaruus, Y mielivaltainen normiavaruus ja $T : X \rightarrow Y$ niiden välinen lineaarikuvaus. Tällöin T on jatkuva.*

Todistus. Jatkuvuuden todistamiseksi määritellään avaruudessa X uusi normi asettamalla

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|Tx\|.$$

Sen todistamiseksi, että kyseessä on todella normi, olkoot $x, y \in X$ ja $c \in \mathbb{F}$ mielivaltaisia. Tällöin todetaan:

(i) Triviaalisti $\|x\|_1 \geq 0$ jokaiselle $x \in X$.

(ii) Jos $\|x\|_1 = 0$, on $\|x\| = \|Tx\| = 0$ ja siis $x = 0$. Kääntäen, jos $x = 0$, on $\|x\|_1 = 0$ triviaalisti.

(iii) $\|cx\|_1 = \|cx\| + \|T(cx)\| = |c|\|x\| + \|cTx\|$

$$= |c|\|x\| + |c|\|Tx\| = |c|(\|x\| + \|Tx\|) = |c|\|x\|_1.$$

(iv) $\|x + y\|_1 = \|x + y\| + \|T(x + y)\| = \|x + y\| + \|Tx + Ty\|$

$$\leq \|x\| + \|y\| + \|Tx\| + \|Ty\| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Näin ollen, $\|x\|_1$ on normi avaruudessa X . Mutta avaruuden X äärellisulotteisuuden ja Seurauksen 10.9 nojalla normit $\|\cdot\|$ ja $\|x\|_1$ ovat ekvivalentteja ja siis on olemassa luku $K > 0$ siten, että $\|x\|_1 \leq K\|x\|$ jokaiselle $x \in X$. Mutta tällöin on $\|Tx\| \leq \|x\|_1 \leq K\|x\|$ jokaiselle $x \in X$. Näin ollen, T on rajoitettu ja siis jatkuva.