

Liite A

Hyödyllisiä asioita

A.1 Liukuluvut

Määritelmä A.1. Olkoon annettu luvut $m, p \in \mathbb{N}$; liukuluvut $\mathbb{L}(m, p)$ on joukko

$$\mathbb{L}(m, p) = \{\pm 0.d_1d_2 \dots d_m \cdot 10^{\pm e_1e_2 \dots e_p} \mid d_i, e_i \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$$

$\pm 0.d_1d_2 \dots d_m$ on liukuluvun mantissa ja $\pm e_1e_2 \dots e_p$ eksponentti; m on mantissan pituus (siis mantissan numeroitten lukumäärä) ja p eksponentin pituus.

Tietokoneessa liukuluvut on esitetty binäärimuodossa. Periaate on kuitenkin täsmälleen sama.

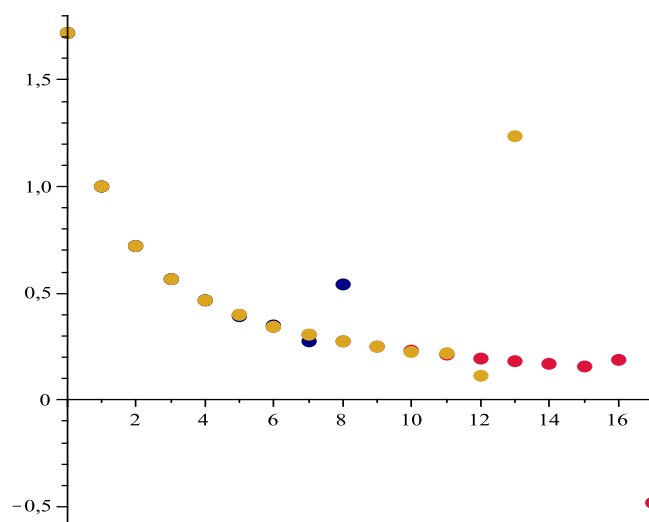
Kun puhutaan sellaisista liukulukujen ominaisuuksista jotka ovat voimassa riippumatta m :stä ja p :stä käytetään yksinkertaisesti symbolia $\mathbb{L}$. Selvästi $\mathbb{L}(m_1, p_1) \subset \mathbb{L}(m_2, p_2)$, jos $m_1 \leq m_2$ ja $p_1 \leq p_2$. Esimerkiksi

$$0.254 \cdot 10^{-2} \in \mathbb{L}(3, 1) \quad -0.48762 \cdot 10^{12} \in \mathbb{L}(5, 2)$$

Liukuluvuissa noudatetaan käytäntöä, että mantissan ensimmäinen numero $d_1 \neq 0$ jos se eksponenttia muuttamalla on mahdollista. Tarkastellaan tapausta $\mathbb{L}(3, 1)$; siis luku $1/1000 \in \mathbb{Q}$ esitettäisiin muodossa $0.100 \cdot 10^{-2}$. Itseisarvoltaan pienin nollasta poikkeava luku $\mathbb{L}(3, 1)$:ssa on $0.001 \cdot 10^{-9}$ ja suurin $0.999 \cdot 10^9$.

Liukuluvut aiheuttavat numeerisia hankaluuksia *pyöristysvirheitten* takia. Esimerkiksi $0.357^2 = 0.127449$, mutta liukuluvuilla $\mathbb{L}(3, 1)$ laskettaessa saadaan $0.127 \cdot 10^0$ (muistetaan että jos viimeinen 'poisjätettävä' luku $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ niin pyöristetään alaspäin ja jos se $\in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ niin pyöristetään ylöspäin). Pyöristysvirheistä johtuen tavalliset laskulait eivät ihan tarkasti päde; esimerkiksi on mahdollista että $a + (b + c) \neq (a + b) + c$.

Liukuluvuilla laskettaessa on mahdollista että laskun lopputulos ei kuulu joukkoon; esimerkiksi jos $a = 0.100 \cdot 10^{-7} \in \mathbb{L}(3, 1)$, niin $a^2 \notin \mathbb{L}(3, 1)$. Tässä tapauksessa puhutaan *alivuodosta* (underflow), siis luku on (itseisarvoltaan) liian pieni esitettäväksi. Alivuoto on usein (mutta ei aina) harmiton, ja laskua voi jatkaa yksinkertaisesti korvaamalla oikean tuloksen nolllalla. Näin laskimet ja tietokoneet menettelevät. *Ylivuoto* (overflow) puolestaan tarkoittaa, että tulos on liian suuri esitettäväksi. Tällöin ohjelman suoritus pysähtyy eli ohjelma 'kaatuu'; yleisesti ottaen ei ole mitään mielekästä tapaa jatkaa ohjelman suoritusta.



Kuva A.1: Kaavalla $\mathcal{I}_n = e - n\mathcal{I}_{n-1}$ lasketut arvot. Sininen: mantissan pituus 5, keltainen: mantissan pituus 10, punainen: mantissan pituus 15.

Liukulukujen yhteydessä hyödyllinen käsite on lukusysteemin *kone-epsilon*. Tällä tarkoitetaan pienintä lukua ε siten, että $1 + \varepsilon > 1$. Esimerkiksi MATLABIN kone-epsilon on $\approx 2 \cdot 10^{-16}$.

Esimerkki A.1. Seuraavassa tapauksessa laskeminen liukuluvuilla johtaa pyöristysvirheitten takia väärään lopputulokseen. Haluttaisiin laskea integraali $\mathcal{I}_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ kun n on iso. Selvästi $0 \leq \mathcal{I}_{n+1} \leq \mathcal{I}_n \leq \dots \leq \mathcal{I}_0 = e - 1$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 x^n e^x - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$$

Siis $\mathcal{I}_n = e - n\mathcal{I}_{n-1}$, joten $\mathcal{I}_n$ voidaan laskea iteratiivisesti lähtien arvosta $\mathcal{I}_0 = e - 1$. Kuvassa A.1 on tulokset MAPLELLA laskettuna. MAPLESSA laskentatarkkuutta voidaan muuttaa komennolla `Digits`. Käytännössä tämä siis muuttaa mantissan pituutta. Kuvan A.1 tulokset on saatu käyttämällä mantissan pituuksia 5, 10 ja 15. ★

A.2 Polynomit

A.2.1 Yhden muuttujan polynomit

Olkoon $\mathbb{P}$ kaikkien polynomien joukko ja $\mathbb{P}_n$ korkeintaan astetta n olevien polynomien joukko. Selvästi molemmat joukot ovat vektoriavaruuksia ja $\mathbb{P}$ on vieläpä *rengas*. Koska $\mathbb{P}_n$ on vektoriavaruus, niin sen alkiot voidaan esittää eri kantavektoreitten avulla. $\mathbb{P}_n$:n luonnollinen kanta on

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

Koska vektoriavaruuden ulottuvuus on sen kantavektoreitten lukumäärä niin $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$. Numeerisessa analyysissä on kuitenkin usein hyödyllistä käyttää *ortogonaalisia* kantavektoreita. Tarkastellaan tässä väliä $[0, 1]$.

Määritelmä A.2. Funktioitten f ja g sisätulo (välillä $[0, 1]$) on

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

f ja g ovat ortogonaaleja, jos $\langle f, g \rangle = 0$.

Haluttaisiin siis muodostaa ortogonaalikanta avaruudelle $\mathbb{P}_n$. Tämä saadaan *Legendren polynomien* avulla.

Määritelmä A.3. Olkoon $L_0 = 1$, $L_1 = 2x - 1$ ja

$$(k + 1)L_{k+1} = (2k + 1)(2x - 1)L_k - kL_{k-1}$$

Polynomeja L_k sanotaan Legendren polynomeiksi.

Selvästi polynomin L_k aste on k , $L_k(0) = (-1)^k$ ja $L_k(1) = 1$. Kuvassa A.2 on piirretty muutama Legendren polynomi. Jos sitten halutaan ortogonaaliset polynomit jollain muulla välillä niin nämä saadaan helposti sopivalla muuttujanvaihdolla tästä perustapauksesta. Legendren polynomeilla on muun muassa seuraavat ominaisuudet.

Lemma A.1. 1. $|L_k(x)| \leq 1$ kaikilla $k \geq 0$ ja $0 \leq x \leq 1$

2. $\int_0^1 L_k^2 dx = 1/(2k + 1)$

3. Rodriguesin kaava antaa polynomit suoraan:

$$L_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^k(1 - x)^k)$$

4. Polynomit toteuttavat differentiaaliyhtälön

$$\frac{d}{dx} (x(1 - x)L'_k) + k(k + 1)L_k = 0$$

5. $\langle L_j, L_k \rangle = 0$ kun $j \neq k$

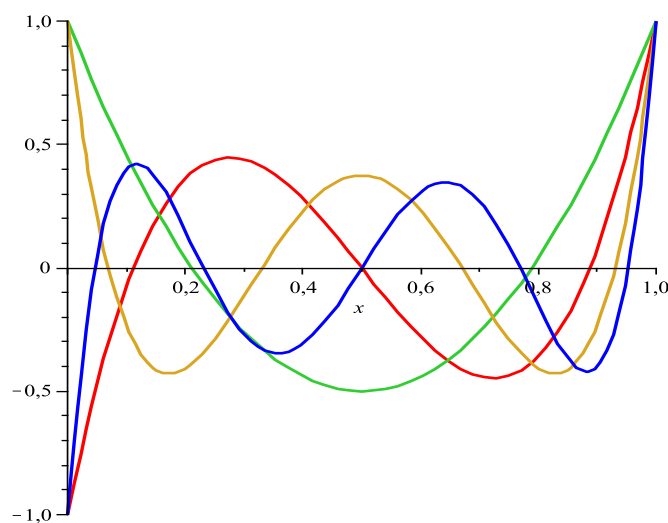
6. Polynomilla L_k on täsmälleen k yksinkertaista nollakohtaa välillä $[0, 1]$.

Todistus. Todistetaan kohta 6. Selvästi väite on totta kun $k = 0$ tai $k = 1$. Oletetaan, että se on totta kun $j = 0, 1, \dots, k - 1$. Koska L_k :n asteluku on k , niin sillä on korkeintaan k yksinkertaista nollakohtaa. Tehdään vastaoletus: L_k :lla on vähemmän kuin k erillistä nollakohtaa välillä $[0, 1]$. Olkoon $x_1, \dots, x_\ell$ ne välillä $[0, 1]$ olevat nollakohdat joitten kertaluvut ovat parittomia. Selvästi siis $\ell < k$ ja olkoon $f = (x - x_1) \dots (x - x_\ell)$. Siis $L_k f(x) > 0$ tai $L_k f(x) < 0$ kaikilla $x \neq x_j$. Toisaalta ortogonaalisuuden perusteella pitäisi päteä

$$\int_0^1 L_k f dx = 0$$

mikä on ristiriita.

✧



Kuva A.2: Legendren polynomit L_2 , L_3 , L_4 ja L_5 .

Ortogonaaliset polynomit liittyvät läheisesti *erikoisfunktioihin*. Näitä on perusteellisesti käsitelty kirjassa [1].

Toinen klassinen kanta avaruuteen $\mathbb{P}_n$ saadaan *Tshebyshevin polynomeilla*. Nämä voidaan määritellä monella tavalla, mutta käytetään tässä rekursiokaavaa kuten Legendren polynomien tapauksessakin.

Määritelmä A.4. *Tshebyshevin polynomit saadaan asettamalla ensin $C_0 = 1$, $C_1 = x$ ja sitten*

$$C_{k+1} = 2xC_k - C_{k-1}$$

Tshebyshevin polynomeilla on seuraavat hyödylliset ominaisuudet.

Lemma A.2. *C_k :lla on täsmälleen k yksinkertaista nollakohtaa välillä $[-1, 1]$. Nollakohdat ovat $x_j = \cos((2j - 1)\pi/2k)$, $1 \leq j \leq k$. Lisäksi*

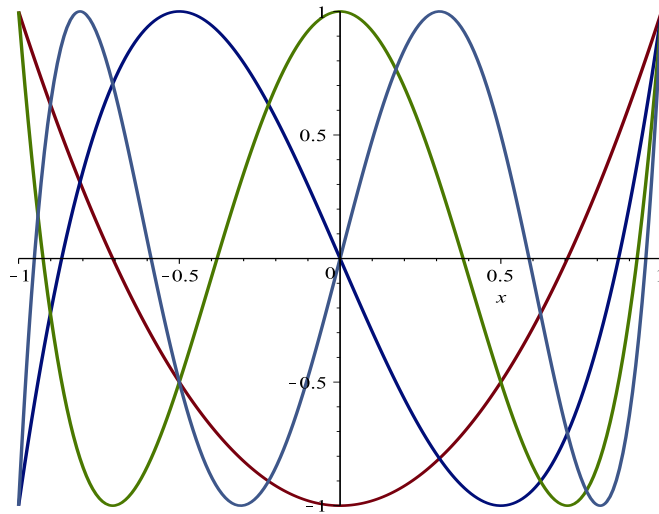
$$|C_k(x)| \leq 1 \quad \text{kaikilla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Todistus. Kaikki väitteet seuraavat helposti siitä, että itse asiassa $C_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$. Tämän voi osoittaa lähtien liikkeelle ylläolevasta rekursiokaavasta. $\diamond$

Kolmas hyödyllinen kanta avaruuteen $\mathbb{P}_n$ saadaan *Bernsteinin polynomien* avulla:

$$B_k^n(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

Bernsteinin polynomeilla on seuraavat ominaisuudet:

Kuva A.3: Tshebyshevin polynomit C_2 , C_3 , C_4 ja C_5 .

Lemma A.3. 1. $B_k^n(x) \geq 0$ kaikilla $k, n \geq 0$ ja $0 \leq x \leq 1$

2. $\sum_{k=0}^n B_k^n(x) = 1$ kaikilla x

3. $0 \leq B_k^n(x) \leq 1$ kaikilla $k, n \geq 0$ ja $0 \leq x \leq 1$

4. $B_k^n(x) = (1-x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x)$

5. $\{B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n\}$ on avaruuden $\mathbb{P}_n$ kanta.

6. $\int_0^1 B_k^n(x) dx = 1/(n+1)$.

Todistus. Ominaisuus 2 seuraa kaavasta

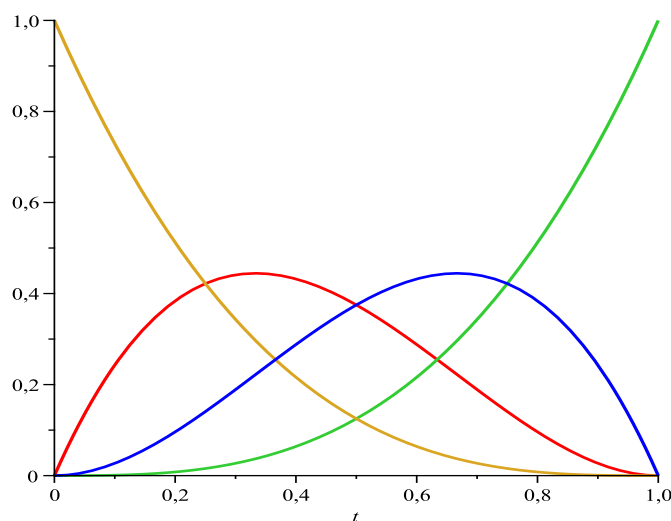
$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n B_k^n(x)$$

Kohta 3 seuraa kohdista 1 ja 2. Kohdat 4, 5 ja 6 jätetään harjoitustehtäväksi. $\diamond$

A.2.2 Yleiset polynomit

Olkon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *moni-indeksi*. Moni-indeksien avulla voidaan kätevästi käsitellä monen muuttujan polynomeja. Ensinnäkin yleinen monomi voidaan kirjoittaa muodossa $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, jolloin kaikkien polynomien avaruus on

$$\mathbb{P}^n = \{p \mid p = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}, c_{\alpha} \in \mathbb{R}\}$$



Kuva A.4: Bernsteinin polynomit B_0^3 , B_1^3 , B_2^3 ja B_3^3 .

missä summassa on vain äärellinen määrä nollasta poikkeavia termejä. Monomin *aste* on $\deg(x^\alpha) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ja on tapana merkitä $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Tällöin *polynomin aste* on luonnollisesti suurin siinä esiintyvien monomien asteista:

$$\deg(p) = \max \{ |\alpha| \mid p = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}, c_{\alpha} \neq 0 \} \quad (\text{A.1})$$

A.3 $\mathbb{R}^n$

Olkoon $\mathbf{e}^j \in \mathbb{R}^n$ vektori jonka j :s komponentti on yksi ja loput ovat nollia. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vektorien x ja y välinen *sisätulo* on

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

Vektorit x ja y ovat *ortogonaalisia*, jos $\langle x, y \rangle = 0$. Vektoreitten $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ muodostama $\mathbb{R}^n$:n *luonnollinen kanta* on ortogonaalinen:

$$\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j \rangle = 0 \quad \text{kaikilla } i \neq j$$

Vektorin x (Euklidinen) pituus eli normi on

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Sisätulolle pätee tärkeä *Cauchyn (tai Schwartzin tai Bunjakovskin) epäyhtälö*

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y| \quad (\text{A.2})$$

Olkoon edelleen $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ avoin pallo jonka keskipiste on p ja säde on r , ja olkoon $\bar{B}_r(p)$ vastaava suljettu pallo.

Määritelmä A.5.

1. Joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, jos kaikilla $p \in \Omega$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(p) \subset \Omega$.
2. Ω on pisteen p ympäristö, jos $p \in \Omega$ ja Ω on avoin.
3. Ω on suljettu, jos sen komplementti Ω^c on avoin.
4. Ω on rajoitettu, jos on olemassa r siten, että $\Omega \subset B_r(0)$.
5. Joukko on kompakti, jos se on suljettu ja rajoitettu.

Intuitiivisesti joukon reuna on varsin helppo käsittää: tyypillisesti jos Ω on avoin niin sen reuna $\partial\Omega$ on ne pisteet jotka pitää lisätä kun otetaan sulkeuma. Yleisesti ottaen voidaan asettaa

Määritelmä A.6.

1. p kuuluu joukon Ω sulkeumaan $\bar{\Omega}$, jos kaikilla $r > 0$ pätee $B_r(p) \cap \Omega \neq \emptyset$.
2. p kuuluu joukon Ω reunaan $\partial\Omega$, jos kaikilla $r > 0$ pätee

$$B_r(p) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad B_r(p) \cap \Omega^c \neq \emptyset$$

Siis selvästi $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$ ja $\partial\Omega = \partial\Omega^c$.

Määritelmä A.7.

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on konvekksi, jos

$$x, y \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega \quad \text{kaikilla} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

2. Joukon Ω konvekksi peite, merkitään $\text{conv}(\Omega)$, on pienin konvekssi joukko joka sisältää Ω .
3. Olkoon Ω konvekksi ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin f on konvekksi, jos

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \text{kaikilla} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

4. Olkoon $p^0, \dots, p^n$ jokin pistejoukko. Piste x on pisteitten p^j konvekssi kombinaatio, jos se voidaan esittää muodossa

$$x = \lambda_0 p^0 + \dots + \lambda_n p^n \quad , \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1 \quad , \quad \lambda_j \geq 0$$

Konveksit kombinaatiot ovat hyödyllisiä seuraavan lemmän takia.

Lemma A.4. Olkoon $S = \{p^0, \dots, p^n\}$. Tällöin $\text{conv}(S)$ on pisteitten p^j konveksien kombinaatioitten joukko.

Vektorin suuruuden mittana on joskus kätevä käyttää muutakin kuin euklidista pituutta. Seuraavat ovat osoittautuneet hyödyllisiksi:

$$\begin{aligned} |x|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ |x|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Jos on selvyyden vuoksi tarpeen, niin Euklidisesta pituudesta voidaan käyttää merkintää $|x|_2$. Näitten eri $\mathbb{R}^n$:n normien avulla voidaan myös matriiseille määritellä normi.

Määritelmä A.8. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ja $p = 1, 2$ tai ∞ . Näitä vastaava matriisinnormi on

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|_p}{|x|_p} = \max_{|x|_p=1} |Ax|_p$$

Suoraan määritelmästä saadaan heti seuraavat hyödylliset ominaisuudet:

$$|Ax| \leq \|A\| |x| \quad \text{ja} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Erityisesti siis neliömatriiseille pätee $\|A^m\| \leq \|A\|^m$.

Tapaukset $p = 1$ ja $p = \infty$ ovat tärkeitä seuraavan Lemman takia.

Lemma A.5.

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^k |a_{ij}| \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

Todistus. Tapaus $p = \infty$. Olkoon $y = Ax$

$$|y_i| = \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_j |a_{ij}| |x_j| \leq |x|_\infty \sum_j |a_{ij}|$$

Siis $\|A\|_\infty \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Olkoon $\sum_j |a_{mj}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ ja valitaan x siten, että

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{jos } a_{mj} \geq 0 \\ -1 & \text{jos } a_{mj} < 0 \end{cases}$$

Tällöin $|x|_\infty = 1$ ja $y_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, joten $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Tapaus $p = 1$. Olkoon edelleen $y = Ax$.

$$\begin{aligned} |y|_1 &= \sum_i |y_i| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_j| \\ &= \sum_j \sum_i |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_j |x_j| \max_i \sum_i |a_{ij}| = |x|_1 \max_j \sum_i |a_{ij}| \end{aligned}$$

Siis $\|A\|_1 \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|$. Olkoon sitten $\sum_i |a_{im}| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$. Tällöin $|Ae^m|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$, joten $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$. $\diamond$

Sen sijaan normin $\|A\|_2$ laskemiseksi ei ole mitään helppoa kaavaa. Huomaa, että jos A on symmetrinen, siis $A = A^T$, niin $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.

Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja määritellään

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Tätä matriisia sanotaan *Vandermonden matriisiksi*.

Lemma A.6.

$$\det(V) = \prod_{j>\ell} (x_j - x_\ell)$$

Eriyisesti siis jos $x_j \neq x_\ell$ kaikilla j ja ℓ , niin $\det(V) \neq 0$.

Todistus. Determinantin määritelmästä seuraa, että $\det(V)$ on muuttujien x_j homogeeninen polynomi, jonka aste on $n(n-1)/2$. Toisaalta V :n määritelmästä seuraa, että jos $x_j = x_\ell$ jollekin j ja ℓ , niin $\det(V) = 0$. Mutta tällöinhän $x_j - x_\ell$ on polynomin $\det(V)$ tekijä. Koska tällaisia pareja (j, ℓ) on $n(n-1)/2$ niin täytyy päteä

$$\det(V) = c \prod_{j>\ell} (x_j - x_\ell)$$

missä c on jokin vakio. Määritelmän mukaan determinantissa on termi $x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1}$. Vertaamalla oikeaan puoleen nähdään, että $c = 1$. $\diamond$

A.4 Differentiaalilaskentaa

A.4.1 Merkintöjä

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$. Asetetaan

$$\begin{aligned} C^0(I) &= C(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \} \\ C^1(I) &= \{f, f' \in C(I)\} \\ C^n(I) &= \{f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)\} \end{aligned}$$

Nämä ovat kaikki vektoriavaruuksia ja polynomit voidaan tulkita näitten aliavaruudeksi.

Olkoon sitten $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Merkintä $f(x) = \mathcal{O}(|x|^m)$ tarkoittaa, että on olemassa c ja ε siten, että

$$|f(x)| \leq c|x|^m \quad \text{kun} \quad |x| < \varepsilon$$

Siis esimerkiksi

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{ja} \quad \cos(x) = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$$

A.4.2 Taylorin lause

Monet numeerisen analyysin virhearviot perustuvat seuraavaan tulokseen, jota on tapana sanoa Taylorin lauseeksi.

Lause A.1. *Olkoon $f \in C^{n+1}(I)$ missä $I = [a, b]$. Valitaan x ja $h > 0$ siten, että $[x, x+h] \subset I$. Tällöin on olemassa $\beta \in [x, x+h]$ siten, että*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\beta)h^{n+1}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} f^{(n+1)}(s)(x+h-s)^n ds$$

Tämän erikoistapauksena saadaan

$$\begin{aligned} \text{väliarvolause} & : f(b) - f(a) = f'(\beta)(b-a) \quad \text{ja} \\ \text{differentiaalilaskennan peruslause} & : f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds \end{aligned}$$

Edelleen väliarvolauseen erikoistapauksena saadaan *Rollen lause*: jos $f(a) = f(b)$, niin on olemassa $\beta \in [a, b]$ siten, että $f'(\beta) = 0$. Interpolointitehtävien virhearvioissa tarvitaan yleistettyä Rollen lausetta.

Lause A.2. *Olkoon $f \in C^n(I)$ missä $I = [a, b]$ ja $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Oletetaan, että $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$. Tällöin on olemassa $\beta \in [a, b]$ siten, että $f^{(n)}(\beta) = 0$.*

Todistus. Tarkastellaan tapausta $n = 2$. Koska $f(x_0) = f(x_1)$ (vastaavasti $f(x_1) = f(x_2)$), niin tavallisen Rollen lauseen perusteella on olemassa $z_0 \in [x_0, x_1]$ (vast. $z_1 \in [x_1, x_2]$) siten, että $f'(z_0) = f'(z_1) = 0$. Mutta tällöinhän Rollen lauseesta sovellettuna funktioon f' seuraa, että on olemassa $\beta \in [z_0, z_1]$ siten, että $f''(\beta) = 0$.

Selvästi edellä esitettyä ideaa voi käyttää induktiivisesti yleisen tapauksen todistukseen. $\diamond$

Jos ei olla kiinnostuttu Taylorin kehitelmän virhetermistä voidaan kirjoittaa

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$$

Kun $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ niin Taylorin sarjan kaava näyttää erittäin monimutkaiselta ellei käytä moni-indeksejä. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ja käytetään merkintöjä

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ \partial^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

Näillä merkinnöillä moniulotteinen Taylorin sarja voidaan kirjoittaa yhtä helposti kuin yksiulotteinen tapaus.

Lemma A.7. Olkoon $f \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x - a)^\alpha + \mathcal{O}((x - a)^{n+1})$$

A.4.3 Vektori-arvoiset funktiot

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jokin sopiva osajoukko ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$; siis $f = (f_1, \dots, f_k)$ missä $f_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$.

Määritelmä A.9. Kuvauksen f Jacobin matriisi eli (ensimmäinen) differentiaali on

$$df = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k / \partial x_1 & \dots & \partial f_k / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Jos $k = 1$, niin on tapana merkitä

$$\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$$

jolloin ∇f on kuvauksen f gradientti. Edelleen tapauksessa $k = 1$ kuvauksen f toinen differentiaali (tai Hessen matriisi) on

$$d^2 f = \begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \dots & \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n & \dots & \partial^2 f / \partial x_n^2 \end{pmatrix}$$

Merkintä $f \in C^1(\Omega)$ tarkoittaa, että f sekä kaikki matriisin df alkioit ovat jatkuvia Ω :ssa.

A.5 Differenssiyhtälö

Differentiaaliyhtälöitten numeeristen menetelmien analyysissä tarvitaan joitain perusasioita lineaarisista differenssiyhtälöistä. Teoriassa on paljon samaa lineaaristen differentiaaliyhtälöitten kanssa. Tarkastellaan homogeenista vakiokertoimista yhtälöä

$$\sum_{j=0}^{\ell} a_j x_{n+j} = 0 \tag{A.5}$$

Koska numeerisissa menetelmissä tarkastellaan alkuarvotekijäitä, niin ajatellaan tässä, että x on ”puoliääretön” vektori:

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$$

Jos x on sitten yhtälön (A.5) ratkaisu, niin sanotaan, että x on *rajoitettu*, jos on olemassa N ja c siten, että

$$|x_n| \leq c \quad \text{kaikilla} \quad n > N$$

Miten löydettäisiin ratkaisuja? Tietenkin hyvän yrittien avulla, kuten lineaaristen differentiaaliryhtälöiden tapauksessa. Olkoon $x_n = z^n$; sijoittamalla tämä yhtälöön (A.5) saadaan

$$\sum_{j=0}^{\ell} a_j z^{n+j} = z^n \sum_{j=0}^{\ell} a_j z^j = 0$$

Olkoon $\rho(z) = \sum_{j=0}^{\ell} a_j z^j$; selvästi $x_n = z^n$ on eräs ratkaisu, jos $\rho(z) = 0$.

Määritelmä A.10. ρ on tehtävän (A.5) karakteristinen polynomi.

Koska (A.5) on lineaarinen, niin sen *yleinen ratkaisu*, siis sen kaikkien ratkaisujen joukko, saadaan lineaarisesti riippumattomien ratkaisujen lineaarikombinaationa. Siis jos karakteristisella polynomilla on ℓ erillistä nollakohtaa z_j , $1 \leq j \leq \ell$, niin yhtälön (A.5) yleinen ratkaisu on muotoa

$$x_n = c_1 z_1^n + \cdots + c_{\ell} z_{\ell}^n$$

missä c_j ovat vakioita. Jos karakteristisella polynomilla on moninkertaisia nollakohtia, niin yleinen ratkaisu on monimutkaisempi. Olkoon ρ :lla m erillistä nollakohtaa jolloin voidaan kirjoittaa

$$\rho(z) = (z - z_1)^{\ell_1} \cdots (z - z_m)^{\ell_m} \quad (\text{A.6})$$

missä $\ell_1 + \cdots + \ell_m = \ell$.

Lemma A.8. Olkoon yhtälön (A.5) karakteristinen polynomi (A.6). Tällöin yhtälön (A.5) yleinen ratkaisu on

$$x_n = p_1 z_1^n + \cdots + p_m z_m^n$$

missä $p_j \in \mathbb{P}_{\ell_j-1}$.

Todistus. Pitää siis tarkistaa, että näin saadaan ℓ lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, ja että termit $p_j z_j^n$ todella ovat ratkaisuja. Molemmat ovat varsin suoraviivaisia tarkistuksia jotka jätetään harjoitustehtäväksi. $\diamond$

Tämän perusteella saadaan sitten

Lemma A.9. Olkoon x yhtälön (A.5) ratkaisu ja olkoon z_j karakteristisen yhtälön nollakohdat. Tällöin

(i) $x_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, jos $|z_j| < 1$ kaikilla j

(ii) x_n pysyy rajoitettuna, jos $|z_j| \leq 1$ kaikilla j ja jos ne nollakohdat joille pätee $|z_j| = 1$ ovat yksinkertaisia.

Siis kompleksitasen yksikköympyrä on differenssiyhtälöille sama kuin kompleksitasen vasen puolitaso differentiaaliyhtälöille.

A.6 Harjoitustehtäviä

1. Näytä, että $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
2. Todista lemmän A.3 kohdat 4, 5 ja 6.
3. Anna esimerkki liukuluvuista joille pätee

$$a + (b + c) \neq (a + b) + c \quad \text{ja} \quad \alpha(\beta\gamma) \neq (\alpha\beta)\gamma$$

4. Osoita, että Legendren polynomeille pätee $L_k(1) = 1$ kaikilla k .

Kirjallisuutta

- [1] G. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] V. I. Arnold, *Ordinary differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 2nd printing of the 1992 edition.
- [3] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry*, 2nd ed., Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [4] R. Burden and J. D. Faires, *Numerical methods*, 6th ed., Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA, 1997.
- [5] J. C. Butcher, *Numerical methods for ordinary differential equations*, 2nd ed., John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2008.
- [6] R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003, Reprint of the second (1989) edition.
- [7] G. Farin, *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*, 4th ed., Computer Science and Scientific Computing, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1997, A practical guide, Chapter 1 by P. Bézier; Chapters 11 and 22 by W. Boehm.
- [8] C. W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [9] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric numerical integration*, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics, vol. 31, Springer, Heidelberg, 2010.
- [10] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. I*, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics, vol. 8, Springer-Verlag, 1993.
- [11] E. Hairer and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. II*, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, 1996.
- [12] G. Hämmerlin and K.-H. Hoffmann, *Numerical mathematics*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991, Readings in Mathematics.

- [13] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis. Vol. 1*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Power series—integration—conformal mapping—location of zeros, Reprint of the 1974 original.
- [14] M. Hirsch, S. Smale, and R. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 60, Elsevier/Academic Press, 2004.
- [15] J. H. Hubbard and B. H. West, *Differential equations: a dynamical systems approach*, Texts in Applied Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [16] ———, *Differential equations: a dynamical systems approach. Higher-dimensional systems*, Texts in Applied Mathematics, vol. 18, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [17] A. Iserles, *A first course in the numerical analysis of differential equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [18] John H. Mathews, *Numerical methods for computer science, engineering, and mathematics*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [19] L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*, 3rd ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [20] L. N. Trefethen and D. Bau, *Numerical linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.