

Luku 3

Yhtälösystemit

Siirrytään sitten tarkastelemaan moniulotteista tapausta.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Geometrisesti siis f_1 ja f_2 määrittävät käyrät tasoon $\mathbb{R}^2$ ja haluttaisiin löytää käyrien leikkauspisteet, kuva 3.1. Tässä tapauksessa on siis 4 ratkaisua. ★

Skalaaritapauksessa pystyttiin funktion merkkejä tarkastelemalla päättämään, että funktiolla on nollakohta tietyllä välillä. Valitettavasti mitään näin helppoa keinoa ei ole moniulotteisessa tapauksessa.

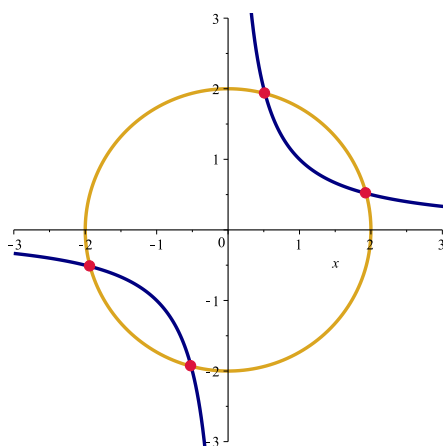
Esimerkki 3.2. Tarkastellaan edelleen esimerkin 3.1 systeemiä yhden nollakohdan ympäristössä. Käyrät $f_1 = 0$ ja $f_2 = 0$ jakavat nollakohdan ympäristön 4 osaan kuten kuvassa 3.2 vasemmalla. Kuvaan on merkitty missä alueissa f_1 ja f_2 ovat positiivisia ja negatiivisia. Siis $+-$ tarkoittaa, että $f_1 > 0$ ja $f_2 < 0$ kyseisessä alueessa. Nyt voisi ajatella, että jos tällainen merkkikuvio esiintyy niin ”jossain siellä keskellä” täytyisi olla ratkaisu. Näin ei kuitenkaan voida päätellä kuten seuraava esimerkki osoittaa:

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = ((x_1 - 1)^2 + 1 - x_2)(x_1 + 1 - 4(x_2 + 1)^2) = 0 \\ \tilde{f}_2 = -x_1 + 5x_2^3 - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Nyt $\tilde{f}_1$ ja $\tilde{f}_2$ muodostavat täsmälleen samanlaisen merkkikuvion kuin f_1 ja f_2 , mutta mitään ratkaisua tuon kuvion alueella ei ole. ★

Johtopäätös on siis että moniulotteisessa tapauksessa ei ole mitään helppoa tapaa osoittaa, että jollain tietyllä alueella on välttämättä ratkaisu. Tästä seuraa, että moniulotteisessa tapauksessa ei välttämättä ole helppoa keksiä hyvää alkuarvausta.

Myös polynomisysteemien ratkaisujen lukumäärää voidaan arvioida polynomien asteen avulla, katso (A.1). Olkoon siis $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $f = (f_1, \dots, f_n)$ missä jokainen



Kuva 3.1: Esimerkin 3.1 tapaus.

f_j on polynomi. Tarkastellaan siis systeemiä

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Seuraava tulos tunnetaan nimellä *Bézout'n lause*.

Lause 3.1. *Olkoon $d_j = \deg(f_j)$. Tällöin systeemillä (3.2) on korkeintaan $d_1 d_2 \dots d_n$ ratkaisua.*

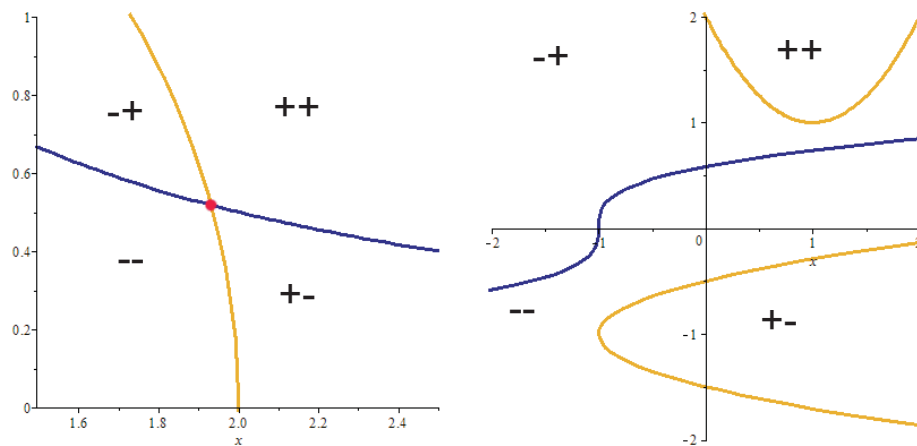
Luonnollisesti tämä antaa ylärajan myös reaalisille ratkaisuille. Esimerkin 3.1 tapauksessa $\deg(f_1) = \deg(f_2) = 2$, joten ratkaisuja on korkeintaan 4. Siis jo graafisesti löydettyjen reaalisten ratkaisujen lisäksi ei voi olla enää kompleksisia ratkaisuja. Systeemin (3.1) tapauksessa $\deg(\tilde{f}_1) = 4$ ja $\deg(\tilde{f}_2) = 3$, joten ratkaisuja on korkeintaan 12. Itse asiassa tarkempi analyysi kuitenkin osoittaa, että ratkaisuja on 9, joista vain yksi on reaalinen.

Huomataan, että ratkaisuja on helposti hyvin paljon kun n on iso. Vaikka harvemmin halutaan laskea läheskään kaikkia nollakohtia on Bézout'n lause kuitenkin hyödyllinen koska se antaa edes jonkinlaisen käsityksen nollakohtien määrästä. Jos kyseessä ei ole polynomisysteemi, niin mitään yleistä ei voida sanoa ratkaisujen määrästä.

Palataan sitten yleiseen systeemiin (3.2): miten se voitaisiin ratkaista? Itse asiassa muodollisesti se voidaan kirjoittaa kiintopisteiteraationa täsmälleen samoin kuin skalaaritapauksessa. Olkoon $g(x) = x + \alpha f(x)$ missä $\alpha \in \mathbb{R}$ on jokin parametri ja iteroidaan:

$$x^{k+1} = g(x^k) = x^k + \alpha f(x^k)$$

Noudatetaan nyt käytäntöä, että siiretään indeksi ylös niin voidaan alaindeksejä käyttää vektorin komponentteja varten. Kun tätä soveltaa esimerkin 3.1 tapaukseen ja otetaan alkuarvo $x^0 = (1, 0.5)$ ja $\alpha = 1$, niin iteraatio ei suppene. Pienentämällä α :n arvoa



Kuva 3.2: Vasemmalla kuvausten f_1 ja f_2 merkit esimerkin 3.1 erään ratkaisun ympärityössä. Oikealla kuvausten $\tilde{f}_1$ ja $\tilde{f}_2$ merkit eräässä tason osassa. Merkit muodostavat samanlaisen kuvion molemmissa tapauksissa, mutta jälkimmäisessä tapauksessa systeemillä ei ole ratkaisua kyseisellä alueella.

havaitaan, että kun $\alpha = 0.1$, niin iteraatio suppenee. Samoin, jos valitaan $x^0 = (1, 2)$ ja $\alpha = -0.1$, niin iteraatio suppenee. Kummassakaan tapauksessa iteraatio ei supene lähimpään kiintopisteeseen kuten kuvasta 3.3 nähdään. Lisäksi suppeneminen on varsin hidasta, etenkin jälkimmäisessä tapauksessa. Tavoitteena olisi sitten analysoida kiintopisteiteraatiota yhtälösystemien tapauksessa. Lähdetään liikkeelle lineaarisesta tapauksesta jonka yhteydessä tietyt peruskäsitteet tulevat helpommin esille.

3.1 Lineaarinen tapaus

Haluttaisiin ratkaista lineaarinen systeemi $Ax = b$. Olkoon $f(x) = b - Ax$ ja

$$g(x) = x + \alpha f(x) = (I - \alpha A)x + \alpha b = Tx + \alpha b$$

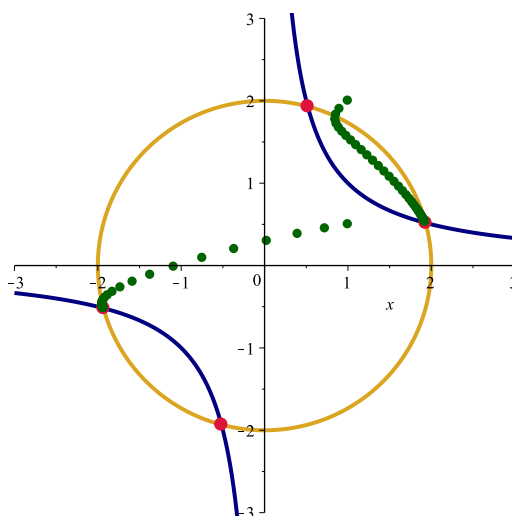
missä siis $T = I - \alpha A$. Olkoon edelleen x_* ratkaisu. Tällöin

$$\begin{aligned} x^{k+1} - x_* &= g(x^k) - g(x_*) = Tx^k + \alpha b - Tx_* - \alpha b = T(x^k - x_*) \Rightarrow \\ x^k - x_* &= T^k(x^0 - x_*) \end{aligned}$$

Virheen pieneminen riippuu siis vain matriisin T ominaisuuksista; siis T :n pitäisi olla sillä tavalla ”pieni”, että $T^k \rightarrow 0$ kun $k \rightarrow \infty$. Mutta matriisin kokoahan mitataan matriisinnormilla (katso määritelmä A.8). Toisaalta Lemman A.5 mukaan matriisinnormi voidaan kätevästi laskea jos vektorin pituutta ei mitata Euklidisella normilla vaan joko normilla

$$|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \quad \text{tai} \quad |x|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

Noudatetaan sellaista käytäntöä, että jos jossain (epä)yhtälössä esiintyy $|x|$ ja/tai $\|A\|$ ilman mitään alaindeksiä, niin silloin kyseinen asia pätee kaikille normeille $|x|_p$ missä



Kuva 3.3: Kiintopisteiteraation suppeneminen esimerkin 3.1 tapauksessa kahdella eri alkuarvolla.

$p = 1, 2$ tai ∞ . Nyt voidaan sitten virhettä arvioida jollain näistä normeista ja saadaan

$$|x^k - x_*| = |T^k(x^0 - x_*)| \leq \|T^k\| |x^0 - x_*| \leq \|T\|^k |x^0 - x_*|$$

mistä saadaan heti

Lemma 3.1. *Jos $\|T\| < 1$ jonkin normin suhteen, niin kiintopisteiteraatio*

$$x^{k+1} = Tx^k + \alpha b$$

suppenee lineaarisesti kohti ratkaisua $Ax_ = b$ olipa alkuarvo x^0 mikä tahansa.*

Siis riittää, että $\|T\| < 1$ jonkin normin suhteen, jolloin virhe tässä normissa vähenee monotonisesti. Luonnollisesti tällöin virheen täytyy mennä nollaan kaikkien muittenkin normien suhteen, mutta virheen pieneneminen ei välttämättä ole monotonista.

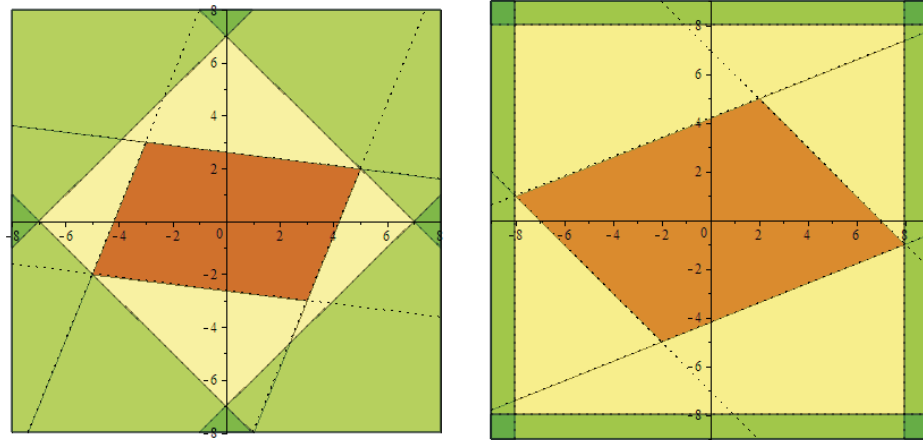
Esimerkki 3.3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad T = I - \alpha A$$

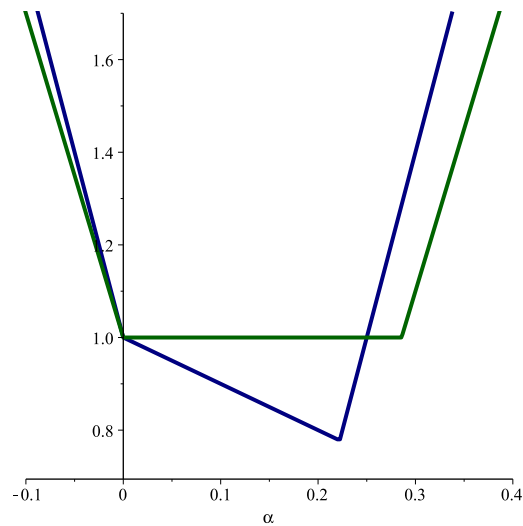
Siispä $\|T\|_1 = \max\{7, 6\} = 7$ ja $\|T\|_\infty = \max\{8, 5\} = 8$. Geometrisesti siis A kuvaa ”yksikkökieken” $|x|_1 \leq 1$ kieken $|x|_1 \leq 7$ sisälle. Vastaavasti A kuvaa ”yksikkökieken” $|x|_\infty \leq 1$ kieken $|x|_\infty \leq 8$ sisälle, kuva 3.4.

$$\begin{aligned} \|T\|_1 &= \max\{|1 - 5\alpha| + 2|\alpha|, 3|\alpha| + |1 - 3\alpha|\} \\ \|T\|_\infty &= \max\{|1 - 5\alpha| + 3|\alpha|, 2|\alpha| + |1 - 3\alpha|\} \end{aligned}$$

Kuvassa 3.5 on piirretty normit α :n funktiona. Siis $\|T\|_1 \geq 1$ kaikilla α kun taas $\|T\|_\infty < 1$ arvoilla $0 < \alpha < 1/4$. $\|T\|_\infty$ saavuttaa minimiarvonsa $7/9$ kun $\alpha = 2/9$. ★



Kuva 3.4: Vasemmalla esimerkin 3.3 matriisi A on kuvannut ”yksikkökiekon” $|x|_1 \leq 1$ ruskeaksi alueeksi. Oikealla ruskea alue on ”kiekon” $|x|_\infty \leq 1$ kuvajoukko.



Kuva 3.5: Esimerkin 3.3 matriisin T normit. $\|T\|_1$ (vihreällä) ja $\|T\|_\infty$ (sinisellä) α :n funktiona.

3.2 Yleinen kiintopiste

Kun tarkastellaan kiintopisteiteraation suppenemista, pitäisi tavalla tai toisella yleistää Lause 2.1 moniulotteiseen tapaukseen. Tässä on seuraava käsite osoittautunut hyödylliseksi. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jokin sopiva osajoukko ja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 3.1. *Kuvaus g on Lipschitz-jatkuva, jos on olemassa (Lipschitz-vakio) μ siten, että*

$$|g(x) - g(y)| \leq \mu |x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \Omega$$

Lisäksi g on kontraktio, jos $g(\Omega) \subset \Omega$ ja $\mu < 1$.

Huomaa, että tässäkin voidaan käyttää mitä tahansa sopivaa normia.

Esimerkki 3.4.

(i) Lineaarinen funktio on aina Lipschitz-jatkuva. Jos $f(x) = Ax$, niin

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| \leq \|A\| |x - y|$$

Siis matriisinormi on lineaarikuvausten Lipschitz-vakio.

(ii) Tarkastellaan sitten skalaarifunktiota $f(x) = x^3$. Tällöin

$$|x^3 - y^3| = |x^2 + xy + y^2| |x - y|$$

Selvästi nyt f ei ole Lipschitz-jatkuva koko reaaliakselilla. Sen sijaan jos rajoitutaan äärelliselle välille $I = [a, b]$, niin nyt f on Lipschitz-jatkuva ja Lipschitz-vakioksi voidaan valita $\mu = 3 \max\{a^2, b^2\}$.

(iii) Kaikki jatkuvat funktiot eivät ole Lipschitz-jatkuvia. Esimerkiksi $f(x) = \sqrt{|x|}$ ei ole Lipschitz-jatkuva missään origon ympäristössä.

(iv) Voidaan osoittaa, että Lipschitz-jatkuvat funktiot ovat derivoituvia melkein kaikkialla. Joissain pisteissä derivaatta ei välttämättä ole olemassa kuten esimerkki $f(x) = |x|$ osoittaa.

★

Yleensä siis epälineaariset funktiot eivät ole Lipschitz-jatkuvia koko avaruudessa mutta usein ne ovat Lipschitz-jatkuvia kun rajoitutaan sopivaan osajoukkoon kuten funktion $f(x) = x^3$ tapauksessa.

Lemma 3.2. *Olkoon $I = [a, b]$ jokin äärellinen väli ja $f \in C^1(I)$. Tällöin f on Lipschitz-jatkuva ja Lipschitz-vakioksi voidaan valita $\mu = \max_{s \in I} |f'(s)|$.*

Todistus. Differentiaalilaskennan peruslauseen mukaan

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(s) ds \right| \leq \int_y^x |f'(s)| ds \leq \max_{s \in I} |f'(s)| |x - y|$$

Koska f' on jatkuva, niin $\max_{s \in I} |f'(s)| < \infty$.

◇

Lemmassa 3.1 siis näytettiin, että jos T on kontraktio, niin kiintopisteiteraatio supenee koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Toisaalta Lauseessa 2.1 myös todettiin, että jos skalaarifunktio g on kontraktio suljetulla välillä I , niin sillä on yksikäsitteinen kiintopiste I :ssä. Näitten tapausten yleistyksenä saadaankin Banachin kiintopistelauseen seuraava versio.

Lause 3.2. *Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu ja g on kontraktio Ω :ssa, niin g :llä on yksikäsitteinen kiintopiste Ω :ssa.*

Todistus. Jos x_* ja y_* olisivat kiintopisteitä, niin

$$|x_* - y_*| = |g(x_*) - g(y_*)| \leq \mu |x_* - y_*|$$

Koska $\mu < 1$ niin tämä on ristiriita. Olkoon sitten $x^0 \in \Omega$ mielivaltainen ja muodostetaan jono $x^{k+1} = g(x^k)$. Osoitetaan, että saatu jono on Cauchy-jono. Lasketaan ensin

$$|x^{k+1} - x^k| = |g(x^k) - g(x^{k-1})| \leq \mu |x^k - x^{k-1}| \leq \mu^k |x^1 - x^0|$$

Tästä seuraa, että jos $n > k$, niin

$$|x^n - x^k| \leq \sum_{j=k}^{n-1} |x^{j+1} - x^j| \leq |x^1 - x^0| \sum_{j=k}^{n-1} \mu^j \leq \frac{\mu^k}{1 - \mu} |x^1 - x^0|$$

Siis $|x^n - x^k| \rightarrow 0$ kun $k \rightarrow \infty$, joten $\{x^k\}_k$ on Cauchy-jono. Konstruktion perusteella $x^k \in \Omega$ kaikilla k . Tunnetusti $\mathbb{R}^n$:ssä Cauchy-jonot suppenevat, joten on olemassa jokin $x_* \in \mathbb{R}^n$ siten, että $x^k \rightarrow x_*$ kun $k \rightarrow \infty$. Mutta koska Ω on suljettu, niin $x_* \in \Omega$. Tämä x_* on kiintopiste koska g :n jatkuvuuden perusteella

$$x_* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^k) = g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^k\right) = g(x_*)$$

◇

Tästä saadaan välittömästi

Seuraus 3.1. *Olkoon g kontraktio Ω :ssa ja x_* sen kiintopiste. Lähtien mistä tahansa alkupisteestä $x^0 \in \Omega$ kiintopisteiteraatio $x^{k+1} = g(x^k)$ suppenee kohti kiintopistettä x_* . Lisäksi suppenemista voidaan arvioida seuraavasti:*

$$\begin{aligned} |x^k - x_*| &\leq \mu^k |x^0 - x_*| \\ |x^k - x_*| &\leq \frac{\mu^k}{1 - \mu} |x^1 - x^0| \end{aligned}$$

Huomaa, että jälkimmäinen arvio ei riipu tuntemattomasta ratkaisusta x_* .

Lineaarisessa tapauksessa siis Lipschitz-vakio saadaan kätevästi matriisinormin avulla. Yleisessä tapauksessa pitää käytännössä jollain tavalla käyttää kuvauksen derivaattoja kuten skalaaritapauksessa. Olkoon taas $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$; tällöin g :n (ensimmäinen) differentiaali tai Jacobin matriisi on

$$dg = \begin{pmatrix} \partial g_1 / \partial x_1 & \dots & \partial g_1 / \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_n / \partial x_1 & \dots & \partial g_n / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Merkitään nyt $g \in C^1(\Omega)$ jos sekä g että kaikki sen osittaisderivaatat $\partial g_i / \partial x_j$ ovat jatkuvia funktioita. Edelleen jos $p \in \Omega$ niin dg_p tarkoittaa dg :n arvoa pisteessä p .

Seuraavan lemmän avulla voidaan arvioida konstruktiivisesti Lipschitz-vakion suuruutta. Lause pätee kaikilla normeilla, mutta kirjoitetaan todistus vain 1-normin tapauksessa.

Lemma 3.3. *Olko Ω konvekksi ja kompakti ja $g \in C^1(\Omega)$. Tällöin g on Lipschitz-jatkuva ja vakioksi μ voidaan asettaa*

$$\mu = \max_{p \in \Omega} \|dg_p\|_1$$

Todistus. Koska Ω on kompakti ja $g \in C^1(\Omega)$, niin $\mu < \infty$. Olkoon $x, y \in \Omega$ ja määritellään $c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ kaavalla $c(s) = y + s(x - y)$. Koska Ω on konvekksi, $c(s) \in \Omega$ kaikilla $s \in [0, 1]$. Olkoon edelleen $h(s) = (g \circ c)(s) = g(c(s))$. Tällöin $h'(s) = dg_{c(s)}c'(s) = dg_{c(s)}(x - y)$ ja

$$|h'(s)|_1 = |dg_{c(s)}(x - y)|_1 \leq \|dg_{c(s)}\|_1 |x - y|_1 \leq \mu |x - y|_1$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)|_1 &= |h(1) - h(0)|_1 = \left| \int_0^1 h'(s) ds \right|_1 = \sum_{j=1}^n \left| \int_0^1 h'_j(s) ds \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^1 |h'_j(s)| ds = \int_0^1 \sum_{j=1}^n |h'_j(s)| ds = \int_0^1 |h'(s)|_1 ds \\ &\leq \int_0^1 \mu |x - y|_1 ds = \mu |x - y|_1 \end{aligned}$$

◇

Esimerkki 3.5. Esimerkin 3.1 tapauksessa siis

$$df = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad dg = I + \alpha df = \begin{pmatrix} 1 + \alpha 2x_1 & \alpha 2x_2 \\ \alpha x_2 & 1 + \alpha x_1 \end{pmatrix}$$

Jos vaikkapa $p = (2, 1)$, niin voidaan valita α siten, että $\|dg_p\|_\infty < 1$. Jos taas $q = (1, 2)$, niin $\|dg_q\|_\infty > 1$ kaikilla $\alpha \neq 0$. ★

3.3 Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmän geometrinen idea on sama kuin yksiulotteisessa tapauksessa: annettua kuvausta f approksimoidaan lineaarisesti. Palautetaan mieleen skalaaritapaus: olkoon annettu jokin funktio f . Tällöin pisteen p ympäristössä paras lineaarinen approksimaatio on $L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$. Kuvaus L on siis f :n *linearisointi* p :n ympäristössä ja

$$f(x) - L(x) = \mathcal{O}(|x - p|^2)$$

Newtonin menetelmä saatiin siis laskemalla L :n nollakohta. Sama idea pätee moniulotteisessa tapauksessa: linearisointi antaa nyt $L(x) = f(p) + df_p(x - p)$. Ratkaisemalla yhtälö $L(x) = 0$ saadaan

$$x = p - (df_p)^{-1}f(p)$$

Jos siis määritellään $N(x) = x - (df_x)^{-1}f(x)$, niin Newtonin iteraatio on taas kiintopisteiteraatio kuvaukselle N : $x^{k+1} = N(x^k)$. Jotta kuvaus olisi hyvin määritelty pitää vaatia, että käänteismatriisi on olemassa, siis että $\det(df) \neq 0$. Lisäksi on tapana sanoa, että nollakohta x_* on *säännöllinen*, jos $\det(df_{x_*}) \neq 0$.

Matriisilaskussa ei yleensä kuitenkaan kannata laskea eksplisiittisesti käänteismatriisia joten algoritmi on syytä kirjoittaa seuraavasti

Algoritmi 6 NEWTONIN MENETELMÄ $\mathbb{R}^n$:SSÄ

Input: valitaan jokin x^0

loop

ratkaise $df_{x^k}\delta = -f(x^k)$
 $x^{k+1} := x^k + \delta$

end loop

Algoritmissa siis oletetaan, että lineaarinen systeemi voidaan ratkaista, toisin sanoen tässäkin luonnollisesti pitää päteä, että $\det(df) \neq 0$.

Esimerkki 3.6. Tarkastellaan edelleen esimerkin 3.1 systeemiä. Kuvassa 3.6 nähdään, että valitsemalla eri alkuarvoja saadaan iteraatio suppenemaan haluttuun nollakohtaan. Vihreällä on piirretty käyrä $\det(df) = 2(x_1^2 - x_2^2) = 0$. ★

Newtonin menetelmän suppenemistarakastelua varten tarvitaan seuraava tekninen tulos.

Lemma 3.4. *Olko x_* kuvauksen f säännöllinen nollakohta. Tällöin $dN_{x_*} = 0$.*

Todistus. Kirjoitetaan yhtälö ensin muodossa

$$df N = df x - f$$

Derivoidaan tätä puolittain. Merkitään vasenta puolta y :llä ja oikeaa puolta z :lla. Siis

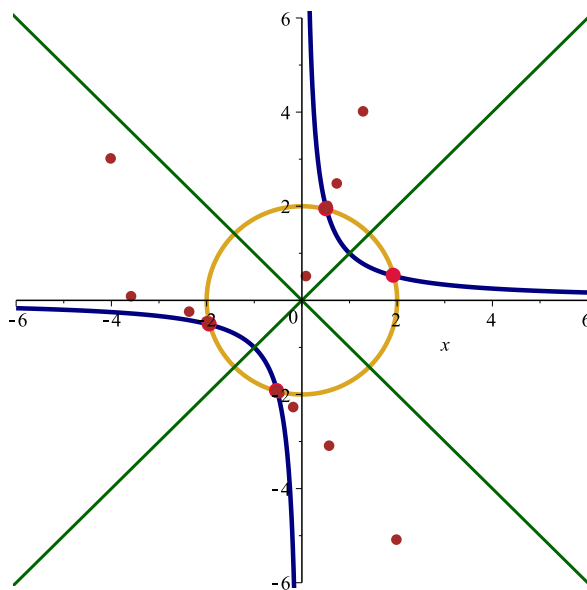
$$(dy_i)_j = d\left(\sum_{\ell} \partial^{\ell} f_i N_{\ell}\right)_j = \sum_{\ell} \partial^{j\ell} f_i N_{\ell} + \sum_{\ell} \partial^{\ell} f_i \partial^j N_{\ell}$$

Matriisina kirjoitettuna tästä saadaan

$$dy = \sum_i d^2 f_i N + df dN$$

Vastaavasti derivoimalla oikeaa puolta saadaan

$$dz = \sum_i d^2 f_i x + df - df = \sum_i d^2 f_i x$$



Kuva 3.6: Newtonin menetelmän suppeneminen. Vihreällä piirretyillä käyrillä $x_2 = \pm x_1$ Newtonin kuvaus N ei ole määritelty.

Luonnollisesti $dy = dz$, joten

$$\sum_i d^2 f_i N + df dN = \sum_i d^2 f_i x$$

Mutta kiintopisteessä $N(x_*) = x_*$, joten

$$df_{x_*} dN_{x_*} = 0$$

Koska x_* on säännöllinen, niin tästä seuraa, että $dN_{x_*} = 0$.

✧

Tästä saadaan heti

Lause 3.3. *N on kontraktio x_* :n ympäristössä. Siis Newtonin menetelmä suppenee, kun alkupiste on riittävän lähellä nollakohtaa x_* .*

Todistus. Koska $dN_{x_*} = 0$, niin jatkuvuuden perusteella on olemassa ε siten, että $\|dN_p\| \leq 1/2$ kaikilla $|p - x_*| \leq \varepsilon$. Olkoon tämä ε -säteinen pallo Ω_ε ja olkoon $x \in \Omega_\varepsilon$ mielivaltainen. Tällöin

$$|N(x) - x_*| = |N(x) - N(x_*)| \leq \frac{1}{2} |x - x_*|$$

joten $N(x) \in \Omega_\varepsilon$. Siis N on kontraktio alueessa Ω_ε ja iteraatio suppenee jos valitaan $x^0 \in \Omega_\varepsilon$.

✧

Voidaan lisäksi osoittaa, että suppeneminen on neliöllistä kuten skalaaritapauksessa.

3.4 Harjoitustehtäviä

1. Esimerkin 3.3 tapauksessa voitaisiin ajatella, että α olisi lävistäjämatriisi:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Kuinka pieneksi nyt on mahdollista saada $\|T\|_1$ ja $\|T\|_\infty$? Mikä on optimaalinen α molemmissa tapauksissa?

2. Lineaarisen systeemin tapauksessa voidaan kiintopisteiteraatio luontevasti kirjoittaa hieman toisin. Tarkastellaan edelleen systeemiä $Ax = b$. Olkoon $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ ja $\hat{A} = A - D$. Siis

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Dx = -\hat{A}x + b \quad \Leftrightarrow \quad x = -D^{-1}\hat{A}x + D^{-1}b$$

Tästä saadaan

$$x^{k+1} = -D^{-1}\hat{A}x^k + D^{-1}b \quad (3.3)$$

mitä sanotaan *Jacobin iteraatioksi*. Testaa tämän menetelmän suppenemista esimerkin 3.3 tapauksessa. Huomaa että lävistäjämatriisin käänteismatriisi saadaan suoraan joten on helppoa muodostaa matriisi $D^{-1}\hat{A}$.

3. Sanotaan, että matriisi A on *lävistäjävaltainen*, jos

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \text{kaikilla } i$$

Näytä, että edellisen tehtävän merkinnöillä A on lävistäjävaltainen, jos ja vain jos $\|D^{-1}\hat{A}\|_\infty < 1$. Siis Jacobin iteraatio suppenee jos A on lävistäjävaltainen. Huomaa, että tästä seuraa ratkaisun olemassaolo, joten lävistäjävaltaiselle matriisille pätee $\det(A) \neq 0$.

Lävistäjävaltaisuusehto voi tuntua hieman keinotekoiselta. Kuitenkin sovelluksissa esiintyy usein matriiseja jotka ovat lävistäjävaltaisia.

4. Osoita, että $f(x) = \sqrt{|x|}$ ei ole Lipschitz-jatkuva origon ympäristössä.

5. Anna esimerkit seuraavista tapauksista missä g on jatkuva.

- (a) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \leq \mu|x - y|$ kaikilla $x, y \in \Omega$ ja $\mu < 1$, mutta g :llä ei ole kiintopistettä Ω :ssa.
- (b) $I \subset \mathbb{R}$ on suljettu, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ kaikilla $x, y \in I$ ja $g(I) \subset I$, mutta g :llä ei ole kiintopistettä I :ssä.
- (c) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $g(\Omega) \subset \Omega$, $|g(x) - g(y)| \leq \mu|x - y|$ kaikilla $x, y \in \Omega$ ja $\mu < 1$, mutta g :llä ei ole kiintopistettä Ω :ssa.

Kiintopistelause on siis siinä mielessä optimaalinen, että kaikki oletukset ovat tarpeellisia.