

Laskuharjoitus 1

1. Näytä, että kiintopisteiteraatio neliöjuurelle voidaan kirjoittaa esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= a + x_k - x_k^2 \\x_{k+1} &= 1 + x_k - x_k^2/a \\x_{k+1} &= a/x_k\end{aligned}$$

Suppeneeko jokin näistä iteraatioista?

2. Olkoon $f(x) = x - e^{-x}$. Tarkista, että funktiolla f on täsmälleen yksi positiivinen nollakohta. Tämä voidaan kirjoittaa kiintopisteiteraationa kahdella tavalla:

$$x_{k+1} = e^{-x_k} \quad \text{tai} \quad x_{k+1} = -\ln(x_k)$$

Osoita, että jompikumpi näistä iteraatioista suppenee. Valitse sitten sopiva alkuarvo ja laske approksimaatio nollakohdalle.

3. Oliko edellisen tehtävän suppeneminen hidasta? Nopeuta suppenemista valitsemalla sopiva parametri kiintopisteiteraatioissa.
4. Luentomonisteessa on yhtälössä (2.1) annettu seuraava algoritmi neljännen juuren laskemiseksi:

$$x_{k+1} = x_k + (a - x_k^4)/4x_k^3$$

Tarkista, että tämä on Newtonin menetelmä polynomille $f(x) = x^4 - a$. Suppeneeko iteraatio kaikilla alkuarvoilla $x_0 > 0$?

5. Olkoon $f(x) = (x-a)^2 h(x)$ missä $h(a) \neq 0$. Suppeneeko kiintopisteiteraatio tässä tapauksessa? Kokeile tapausta $f(x) = x(x-1)^2$. Kaksinkertaiset nollakohdat ovat yleensä hankalia mille tahansa menetelmälle.