

Laskuharjoitus 10

1. Sovelleta trapetsimenetelmää tehtävään $x' = f(t, x) = -x + \cos(t)$, $x(0) = 1$. Koska f on lineaarinen niin x_{n+1} voidaan helposti ratkaista ja voidaan siis kirjoittaa

$$x_{n+1} = x_n + hF(t_n, x_n, h)$$

Mikä on F tässä tapauksessa? Mikä näyttäisi siis olevan trapetsimentelmän kertaluku, jos sovelletaan määritelmää 6.3?

2. Tarkastellaan yhtälöä $x' = -x$, $x(0) = 1$ jonka ratkaisu on $x(t) = e^{-t}$. Sovella tähän trapetsimenetelmää, ja analysoi suppenemista samaan tapaan kuin luentorungon esimerkissä 6.2.
3. Luennolla todettiin, että seuraava 2-vaiheinen RK-menetelmä on kertalukua 2.

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= f(t_n, x_n) \\ \kappa_2 &= f(t_n + h/2, x_n + h\kappa_1/2) \\ x_{n+1} &= x_n + h\kappa_2\end{aligned}$$

Sovella tätä edellisen tehtävän yhtälöön ja vertaa ratkaisua trapetsimenetelmällä saatuun ratkaisuun.

4. Näytä, että jos sovellat klassista RK-menetelmää yhtälöön $x' = ax$, niin

$$x_{n+1} = \left(1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2 + \frac{1}{6}a^3h^3 + \frac{1}{24}a^4h^4\right)x_n$$

Huomaa, että

$$e^{ah} = 1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2 + \frac{1}{6}a^3h^3 + \frac{1}{24}a^4h^4 + \mathcal{O}(h^5)$$

Itse asiassa yleisemminkin pätee, että jos otetaan mikä tahansa 4-vaiheinen RK-menetelmä joka on kertalukua neljä, niin saadaan sama approksimaatio kun sitä sovelletaan yhtälöön $x' = ax$.

5. Tarkastellaan 3-vaiheista RK-menetelmää

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= f(t_n, x_n) \\ \kappa_2 &= f(t_n + c_2h, x_n + c_2h\kappa_1) \\ \kappa_3 &= f(t_n + c_3h, x_n + c_3h\kappa_2) \\ x_{n+1} &= x_n + h(b_1\kappa_1 + b_2\kappa_2 + b_3\kappa_3)\end{aligned}$$

Etsi parametrit siten, että saat kolmannen kertaluvun menetelmän. Lemman 6.1 toinen ehto on jo voimassa, ja toisen ehdon perusteella $b_1 + b_2 + b_3 = 1$. Huomaa, että tehtävän luonteen takia $c_2 c_3 b_3 \neq 0$. Miksi?

Osoittautuu, että yksi parametri voidaan valita vapaasti. Tämäkin menetelmä löydettiin jo noin 100 vuotta sitten. Koska laskut tehtiin käsin, niin oli tärkeä valita parametrit siten, että ne olisivat mahdollisimman yksinkertaisia rationaalilukuja. Mikä siis olisi tässä ”optimaalinen” valinta?